МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методические указания в выполнению
домашнего задания по курсу :

«Функции комплексной переменной и операционное счисление»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методические указания в выполнению
домашнего задания по курсу :

«Функции комплексной переменной и операционное счисление»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

ВВЕДЕНИЕ

Данное пособие предназначено для самостоятельной работы на практических занятиях по математике студентов третьего семестра.

Цель данного пособия – активизировать работу студентов, научить работать самостоятельно с книгой, что будет способствовать улучшению качества подготовки студентов по данному разделу

Каждое из 7-ми занятий состоит из краткого теоретического введения, решения типовых примеров и контрольных заданий, предназначенных для выполнения студентами. Цель контрольных заданий – выработка самоконтроля студентов при усвоении пройденной темы и помощь в выполнении домашнего задания.

ЗАНЯТИЕ 1. Комплексные числа, формы их задания, геометрическое изображение. Действия над комплексными числами

§ 1. Комплексные числа, формы их задания, геометрическое изображение

1. Определение. Комплексным числом называется выражение вида $z = x + iy$, где x и y – действительные числа; i – мнимая единица $(i^2 = -1)$; $x = \operatorname{Re} z$ – действительная часть z; $y = \operatorname{Im} z$ – мнимая часть z.

2. Геометрическое изображение комплексного числа. Геометрически комплексное число $z = x + iy$ задается точкой на плоскости $M(x, y)$ или радиусом вектором этой точки $\overline{OM} = (x, y)$.

3. Определение. Модулем комплексного числа $x + iy$ называется длина радиуса вектора $\overline{OM}$. Модуль обозначается через $|z|$ и вычисляется по формуле

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{1}$$

4. Определение. Аргументом комплексного числа $x + iy$ называется угол, который образует радиус вектор данного числа с положительным направлением оси OX. Обозначается через $\operatorname{Arg} z$. Главным значением аргумента $\arg z$ называется аргумент, лежащий в промежутке $]-\pi, \pi]$. Очевидно, что аргумент z и главное значение аргумента z связаны следующим соотношением:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2}$$

Главное значение аргумента z (рис. 1) определяется по формуле

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}, & x > 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} + \pi, & x < 0,\ y > 0; \\ \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \pi, & x < 0,\ y < 0. \end{cases} \tag{3}$$

5. Выражение действительной и мнимой частей комплексного числа через модуль и аргумент

$$\begin{aligned} x &= \operatorname{Re} z = |z| \cdot \cos \arg z; \\ y &= \operatorname{Im} z = |z| \cdot \sin \arg z. \end{aligned} \tag{4}$$

6. Формы задания комплексных чисел:

а) алгебраическая – $z = x + iy$; (5)

б) тригонометрическая – $z = |z| \cdot (\cos \arg z + i \sin \arg z)$; (6)

в) показательная – $z = |z| \cdot e^{i \arg z}$ (7)

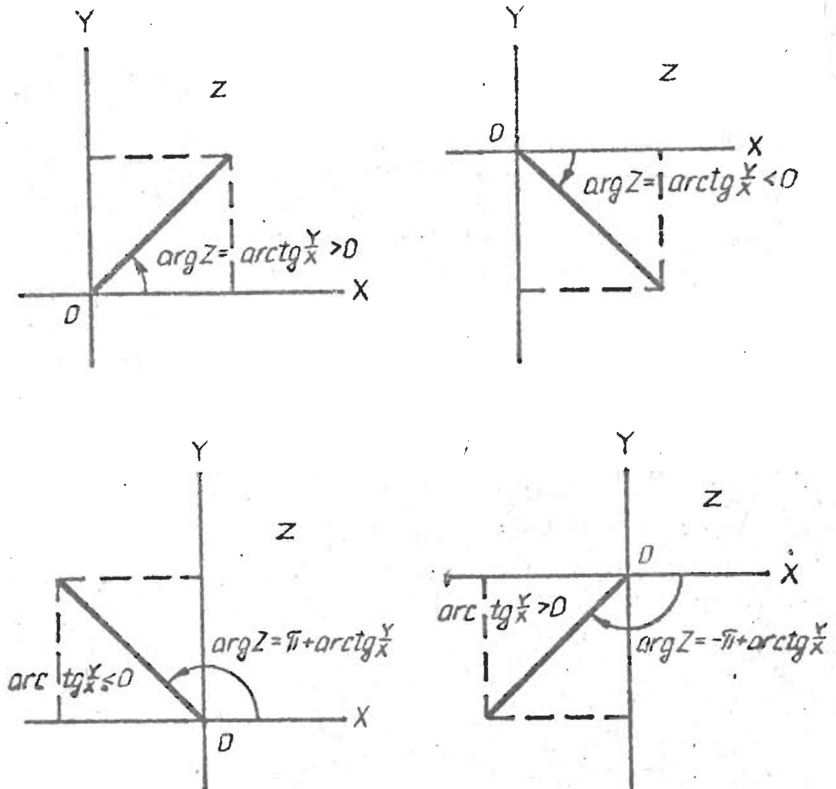

Рис. 1

Примеры: записать комплексные числа, заданные в алгебраической форме, в тригонометрической и показательной формах. Изобразить данные числа геометрически. Указать на чертеже для данного числа $|z|, \arg z, \operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z$.

1. $z = 1 + i$.

1) Найдем модуль комплексного числа по формуле (1)

$$|z| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

2) Найдем аргумент комплексного числа по формуле (3), учитывая, что $x = 1 > 0$

$$\arg z = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

3) Запишем комплексное число в тригонометрическом виде по формуле (6)

$$z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

4) Запишем комплексное число в показательном виде по формуле (7)

$$z = \sqrt{2}\, e^{i\frac{\pi}{4}} .$$

5) Изобразим число $z = 1 + i$ геометрически (рис. 2).

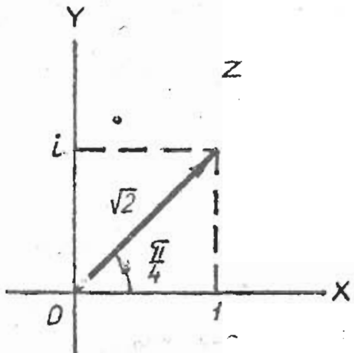

Рис. 2

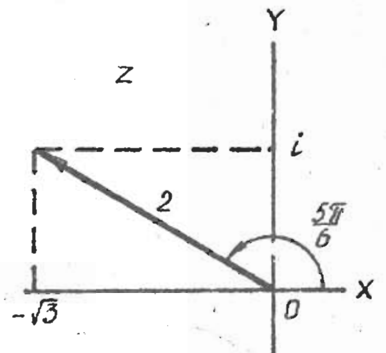

Рис. 3

2. $z = -\sqrt{3} + i$.

Решим пример по тому же алгоритму.

1) $|z| = \sqrt{3+1} = 2$.

2) Так как $x = -\sqrt{3} < 0$, а $y = 1 > 0$, то

$$\arg z = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \pi = -\frac{\pi}{6} + \pi = \frac{5}{6}\pi .$$

3) $z = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + i\sin\frac{5}{6}\pi\right)$.

4) $z = 2e^{i\frac{5}{6}\pi}$.

5) Изобразим число $z = -\sqrt{3} + i$ геометрически (рис. 3).

Контрольное задание № 1

Записать комплексные числа в тригонометрической и показательной формах и изобразить их графически

1. $z = -1 - i$; 2. $z = 1 - i\sqrt{3}$.

§ 2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме

Пусть даны два комплексных числа $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$.

1. Равенство комплексных чисел. Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ равны тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Очевидно, $|z_1| = |z_2|$, $\arg z_1 = \arg z_2$, $\operatorname{Arg} z_1 = \operatorname{Arg} z_2 + 2k\pi$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

2. Сложение и вычитание. Суммой чисел z_1 и z_2 называется комплексное число

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \qquad (8)$$

а разностью чисел z_1 и z_2 – комплексное число

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (9)$$

При сложении (или вычитании) комплексных чисел изображающие их векторы складываются (или вычитаются) по обычным правилам векторной алгебры.

3. Сопряженные комплексные числа. Два комплексных числа $z = x + iy$ и $\bar{z} = x - iy$ называются сопряженными. Точки, изображающие сопряженные числа, симметричны относительно действительной оси. Очевидно, что $|z| = |\bar{z}|$, $\arg z = -\arg \bar{z}$.

4. Умножение. Комплексные числа умножаются как двучлен на двучлен

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2).$$

Произведение комплексного числа и ему сопряженное является действительным числом, равным квадрату их модуля

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2 . \qquad (10)$$

5. Деление. При делении комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$ необходимо числитель и знаменатель дроби умножить на число, сопряженное знаменателю. В результате получим

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \qquad (11)$$

6. Возведение в степень. При возведении в степень используется бином Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^m a^{n-m} b^m + \ldots + b^n .$$

При этом следует помнить, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$, $i^6 = -1, \ldots$

Примеры: даны $z_1 = 2i$ и $z_2 = 1 - i$. Найти

1. $z_1 + z_2$ 2. $z_1 - z_2$ 3. $z_1 \cdot z_2$. 4. $\frac{z_1}{z_2}$. 5 z_2^4 .

Изобразить графически данные числа и результаты примеров 1,2,3,4,5.

1. $z_1 + z_2 = 2i + 1 - i = 1 + i$ (рис. 4).

2. $z_1 - z_2 = 2i - (1 - i) = -1 + 3i$ (рис. 5).

Разность $z_1 - z_2$ есть разность векторов z_1 и z_2 . Необходимо этот вектор поместить в начало координат, тогда конец его дает число $z_1 - z_2$.

3. $z_1 \cdot z_2 = 2i(1 - i) = 2i - 2i^2 = 2 + 2i$.

4. $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{2i-2}{1+1} = -1+i.$

5. $z_2^4 = (1-i)^4 = 1-4i+6i^2-4i^3+i^4 = 1-4i-6+4i+1 = -4.$

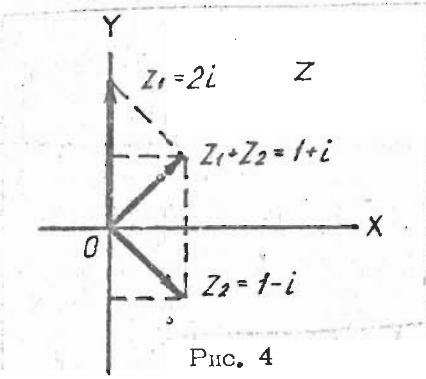

Рис. 4

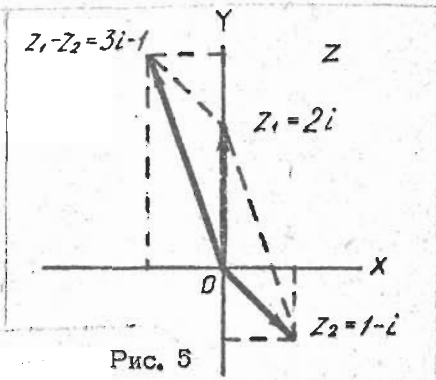

Рис. 5

Контрольное задание № 2

Даны $z_1=-1+i\sqrt{3}$ и $z_2=2+2\sqrt{3}\,i$. Вычислить

1. z_1+z_2. 2. z_1-z_2. 3. $z_1\cdot z_2$. 4. $\frac{z_1}{z_2}$. 5. z_1^3.

§ 3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах

1. Сложение и вычитание удобнее производить в алгебраической форме.

2. При умножении двух комплексных чисел модули их перемножаются, а аргументы складываются

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\,|z_2|\left[\cos(\arg z_1+\arg z_2)+i\sin(\arg z_1+\arg z_2)\right]; \qquad (12)$$

$$z_1\cdot z_2=|z_1|\,|z_2|\,e^{i(\arg z_1+\arg z_2)} \qquad (13)$$

3. При делении двух комплексных чисел $\frac{z_1}{z_2}$ модули их делятся, а аргументы вычитаются

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\arg z_1-\arg z_2)+i\sin(\arg z_1-\arg z_2)\right]; \qquad (14)$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{|z_1|}{|z_2|}\,e^{i(\arg z_1-\arg z_2)}. \qquad (15)$$

4. При возведении в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени

$$z^n=|z|^n(\cos n\arg z+i\sin n\arg z). \qquad (16)$$

Формула (16) называется формулой Муавра

$$z^n=|z|^n(\cos n\arg z+i\sin n\arg z)=|z|^n e^{in\arg z} \qquad (17)$$

5. Извлечение корня n-й степени из комплексного числа производится по следующей формуле в тригонометрической форме:

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\arg z+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\arg z+2k\pi}{n}\right),\ k=0,1,2,\dots,(n-1), \qquad (18)$$

в показательной форме

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\,e^{i\frac{\arg z+2k\pi}{n}} \qquad (19)$$

В результате извлечение корня n-й степени получим n комплексных чисел, модули всех этих чисел равны между собой (и равны $\sqrt[n]{|z|}$). Следовательно, все они лежат на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат. Аргументы отличаются один от другого на постоянное число $\frac{2\pi}{n}$, следовательно, все эти точки расположены в вершинах правильного n-угольника.

Примеры: даны $z_1=1+i\sqrt{3}$ и $z_2=2\sqrt{3}-2i$. Вычислить

1. $z_1\cdot z_2$ 2. $\frac{z_1}{z_2}$ 3. z_2^5 4. $\sqrt[3]{z_1}$,

переходя к тригонометрической или показательной форме. Переведем числа z_1 и z_2 в тригонометрическую форму. Получим

$$|z_1|=\sqrt{1+3}=2;\quad \arg z_1=\frac{\pi}{3},\quad z_1=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

$$|z_2|=\sqrt{12+4}=4;\quad \arg z_2=-\frac{\pi}{6},\quad z_2=4\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

1. $z_1\cdot z_2=2\cdot4\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)\right]=8\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=$
$=4\sqrt{3}+4i$ (рис. 6).

2. $\frac{z_1}{z_2}=\frac{2}{4}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right]=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{2}i$ (рис. 7).

3. $z_2^5=4^5\left[\cos5\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin5\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right]=4^5\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)=-512\sqrt{3}-512i.$

4. $$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}=\begin{cases}\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right), & k=0;\\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7}{9}\pi+i\sin\frac{7}{9}\pi\right), & k=1;\\ \sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13}{9}\pi+i\sin\frac{13}{9}\pi\right), & k=2.\end{cases}$$

(рис. 8).

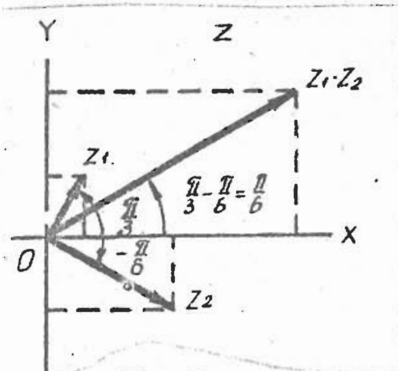

Рис. 6

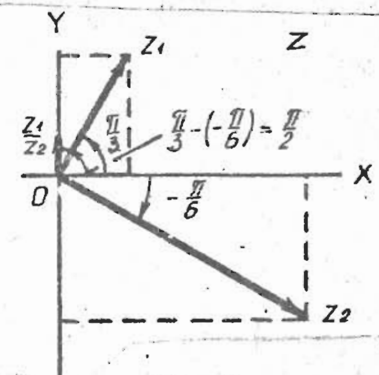

Рис. 7

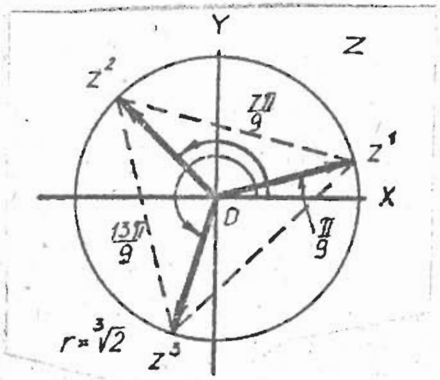

Рис. 8

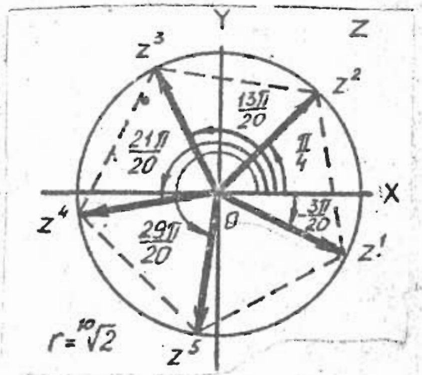

Рис. 9

При последующих значениях "к" значения корней повторяются в силу периодичности функций синуса и косинуса, например, при $K=3$

$$\sqrt[3]{z_1}=\sqrt[3]{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{9}+2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{9}+2\pi\right)\right]=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right).$$

5. Вычислить $\sqrt[5]{-1-i}$.

Переведем подкоренное выражение в показательную форму. Получим

$$-1-i=\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{3}{4}\pi\right)}.$$

Извлечем корень по формуле (19), получим

$$\sqrt[5]{-1-i}=\sqrt[10]{2}\,e^{i\left(\frac{-\frac{3}{4}\pi+2k\pi}{5}\right)}=\begin{cases}\sqrt[10]{2}\,e^{-\frac{3}{20}\pi i}, & k=0;\\ \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{\pi}{4}\pi i}, & k=1;\\ \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{13}{20}\pi i}, & k=2;\\ \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{21}{20}\pi i}, & k=3;\\ \sqrt[10]{2}\,e^{\frac{29}{20}\pi i}, & k=4.\end{cases}$$

Все найденные точки являются вершинами пятиугольника правильного вписанного в круг радиуса $\sqrt[10]{2}$ (рис. 9).

Контрольное задание № 3

Вычислить, переходя от алгебраической формы записи к тригонометрической форме, следующие выражения:

1. $3i(1-i\sqrt{3})$ 2. $\frac{2+2\sqrt{3}i}{1-i\sqrt{3}}$ 3. $(\sqrt{3}-i)^5$ 4. $(-1+i\sqrt{3})^9$

5. $\sqrt[3]{i}$, 6. $\sqrt[4]{2\sqrt{3}-2i}$.

Задание на дом

№1. Даны комплексные числа $z_1=3+2i$; $z_2=-1+i$. Вычислить z_1+z_2, $z_1 z_2$, $\bar{z}_1+\bar{z}_2$, $\bar{z}_1-\bar{z}_2$ и построить на комплексной плоскости.

№2. Вычислить

а) i^8, i^{15}, б) $(2+2i)(1-i)i$, в) $\frac{(3-i)(1+3i)}{(5+2i)(2+5i)}$,

г) $(1+i\sqrt{3})^3$, д) $\left(\frac{\sqrt{3}+i}{2}\right)^{27}$.

№ 3. Вычислить все значения корней и построить их на комплексной плоскости а) $\sqrt[3]{-1+i}$; б) $\sqrt[4]{-1}$; в) $\sqrt[6]{-1+i\sqrt{3}}$.

ЗАНЯТИЕ 2. Геометрия на комплексной плоскости. Функция комплексного переменного, ее геометрический смысл

§ 1. Геометрия на комплексной плоскости

Задание основных геометрических объектов на комплексной плоскости

1. $|z_1-z_2|$ – расстояние между точками z_1 и z_2.
2. $|z-a|=R$ – уравнение окружности с центром в точке $z=a$ и радиусом R , так как расстояние всех точек z

от постоянной точки a постоянно и равно R.

3. $|z-z_1|+|z-z_2|=2a$ – уравнение эллипса, так как сумма расстояний от двух данных точек z_1 и z_2 (фокусов) есть величина постоянная, равная $2a$ (большая ось эллипса).

4. $\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2a$ – уравнение гиперболы, фокусы которой лежат в точках z_1 и z_2, расстояние между вершинами $2a$, а между фокусами – $|z_1-z_2|=2c$.

5. $\arg z=\alpha$ – уравнение луча, выходящего из точки $z=0$ под углом α к оси OX.

6. $\arg(z-a)=\alpha$ – уравнение луча, выходящего из точки a под углом α к оси OX.

7. $\operatorname{Re} z=a$ или $x=a$ – уравнение прямой параллельной оси OY.

8. $\operatorname{Im} z=b$ или $y=b$ – уравнение прямой параллельной оси OX.

9. $|z-a|\leqslant R$ – множество точек, лежащих внутри круга с центром в точке $z=a$ и радиусом R и на самой окружности (рис. 10).

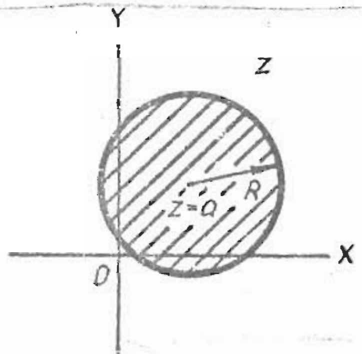

Рис. 10

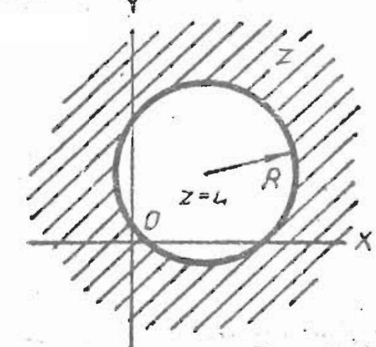

Рис. 11

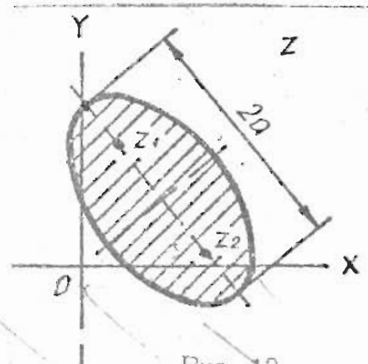

Рис. 12

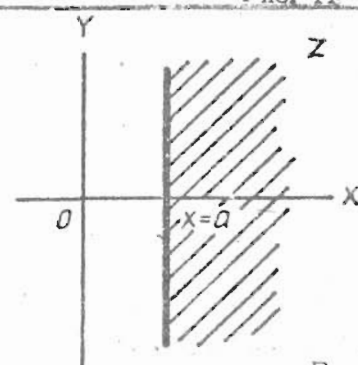

Рис. 13

10. $|z-a|>R$ – множество точек, лежащих вне круга радиуса R с центром в точке a (рис. 11).

11. $|z-z_1|+|z-z_2|\geqslant a$ – множество точек, лежащих вне эллипса и на самом эллипсе (рис. 12).

12. $\operatorname{Re} z\geqslant a$ – полуплоскость – точки, лежащие правее прямой $x=a$ и на самой прямой (рис. 13).

13. $\operatorname{Im} z<b$ – полуплоскость под прямой $y=b$ (рис. 14).

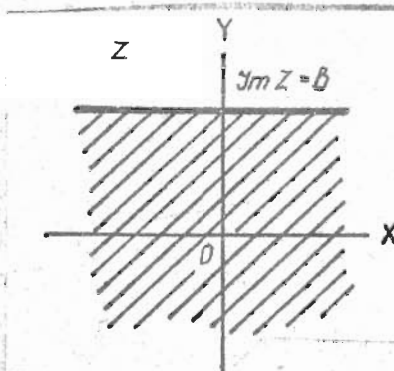

Рис. 14

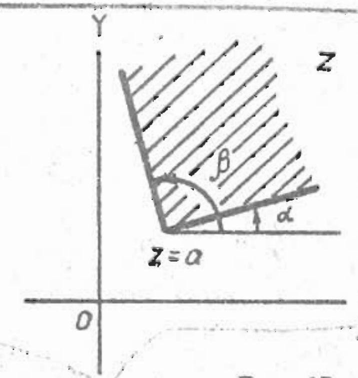

Рис. 15

14. $\alpha<\arg(z-a)<\beta$ – точки, лежащие внутри угла с вершиной в точке $z=a$, стороны угла составляют с осью OX соответственно углы α и β (рис. 15).

15. $\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|\geqslant 2a$ – точки, лежащие на ветвях гиперболы и области, содержащие фокусы гиперболы (рис. 16).

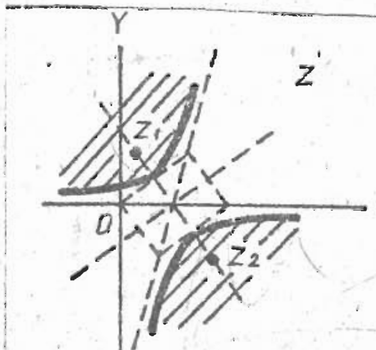

Рис. 16

<u>Построение областей на комплексной плоскости по заданной системе неравенств.</u>

Примеры: построить области плоскости z, определяемые неравенствами

$$1.\quad \begin{cases} |z-i|\geqslant 2; \\ -\frac{3}{4}\pi<\arg z<-\frac{\pi}{4}; \\ \operatorname{Im} z\geqslant -3. \end{cases}$$

Неравенство $|z-i|\geqslant 2$ определяет точки, лежащие вне круга радиуса 2 и с центром в точке $z=i$, а также точки, лежащие на окружности $|z-i|=2$. Неравенство $-\frac{3}{4}\pi < \arg z < -\frac{\pi}{4}$ определяет точки, лежащие между лучами $\varphi=-\frac{3}{4}\pi$ и $\varphi=-\frac{\pi}{4}$, не включая самих лучей. Неравенство $\operatorname{Im} z \geqslant -3$, т.е. $y \geqslant -3$ определяет точки, лежащие выше прямой $y=-3$ и на самой прямой (рис. 17).

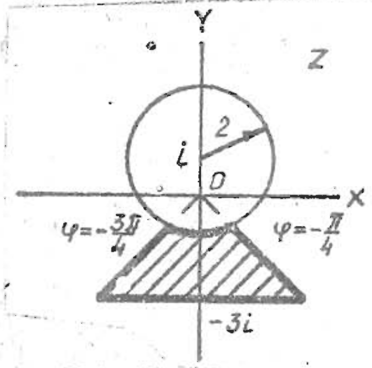

Рис. 17

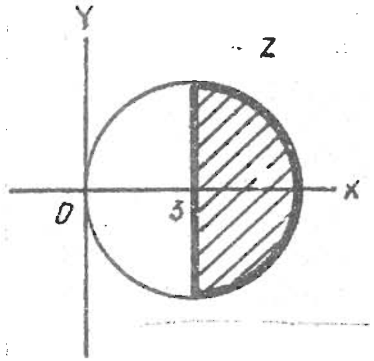

Рис. 18

2. $\begin{cases} \operatorname{Re}\frac{1}{z} \geqslant \frac{1}{6}; \\ \operatorname{Re} z \geqslant 3. \end{cases}$

В первом неравенстве запишем z в алгебраической форме. Получим

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}=\frac{x}{x^2+y^2}-i\frac{y}{x^2+y^2};$$

$$\operatorname{Re}\frac{1}{z}=\frac{x}{x^2+y^2}; \quad \frac{x}{x^2+y^2}\geqslant\frac{1}{6}; \quad x^2+y^2-6x\leqslant 0; \quad (x-3)^2+y^2\leqslant 9; \quad |z-3|\leqslant 3,$$

т.е. множество точек, лежащих внутри круга радиуса 3 с центром в точке $z=3$ и на окружности $|z-3|=3$. $\operatorname{Re} z \geqslant 3$ дает полуплоскость, т.е. точки, лежащие на прямой $x=3$ и правее этой прямой (рис. 18).

3. $\begin{cases} |z-i|+|z+i|\leqslant 4; \\ \frac{\pi}{4}<\arg(z+i)<\pi. \end{cases}$

Первое неравенство дает точки, лежащие внутри эллипса с фокусами в точках $z=i$ и $z=-i$ и большой осью, равной 4. Тогда полуось эллипса $a=2$. Расстояние между фокусами

$2c=|i-(i)|=2$, тогда $c=1$. Определяем b по формуле $b=\sqrt{a^2-c^2}$; $b=\sqrt{3}$. Уравнение этого эллипса в действительной области записывается в виде

$$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{4}=1.$$

Второе неравенство дает точки между двумя лучами, выходящими из точки $z=-i$ под углом $\frac{\pi}{4}$ и под углом π к оси OX (рис. 19).

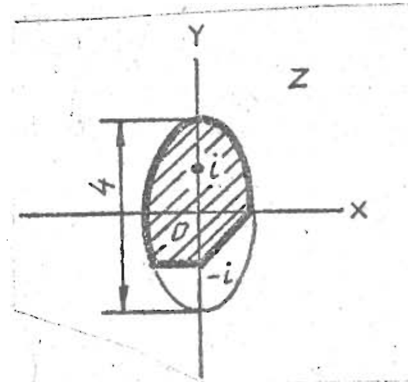

Рис. 19

Контрольное задание № 4

Построить области, определяемые следующими неравенствами:

1. $\begin{cases} |z-2-i|<2; \\ \frac{\pi}{2}<\arg(z-2-i)\leqslant -\frac{3}{4}\pi. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} |z-2|+|z+2|>5; \\ |z-2|\leqslant 2. \end{cases}$ 3. $\begin{cases} \frac{1}{2}z\cdot\bar{z}\geqslant \operatorname{Re} z; \\ \operatorname{Im} z<0. \end{cases}$

§ 2. Функция комплексного переменного, ее геометрический смысл

1. Определение. Рассмотрим две комплексные плоскости Z и W. Первая содержит точки $z=x+iy$, вторая – точки $W=u+iv$. Пусть $\{z\}$ – некоторое множество точек плоскости Z, а $\{W\}$ – некоторое множество точек плоскости W. Функцией комплексного переменного f или отображением множества $\{z\}$ на множество $\{W\}$ называется такое соответствие, при котором каждому элементу $z\in\{z\}$ соответствует определенный элемент $W\in\{W\}$. W – образ элемента z, а z – прообраз элемента W. Образ выражается через прообраз $W=f(z)$.

2. Всякая функция комплексного переменного может быть записана в виде $W=u(x,y)+iv(x,y)$, где u и v – действительные функции действительных переменных x и y. Например,

$$W=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi;$$

$$u(x,y)=x^2-y^2; \quad v(x,y)=2xy.$$

3. Правило отыскания образа линии. В плоскости z задана линия $\mathcal{F}(x,y)=0$. Найти образ этой линии на плоскости W при отображении с помощью функции $W=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Для решения этой задачи нужно решить систему уравнений $\begin{cases} u=u(x,y) \\ v=v(x,y) \end{cases}$, выразив x и y через u и v. Подставив полученные выражения для x и y в уравнение данной линии, получим образ этой линии в плоскости W: $\Phi(u,v)=0$.

4. Линейная функция $W=az+b$ производит отображение по следующему правилу: прямая переходит в прямую, окружность – в окружность.

5. Функция $W=\frac{1}{z}$ отображает прямые и окружности, проходящие через начало координат в прямые, так как точка $z=0$ отображается в бесконечно-удаленную точку $W=\infty$. Прямые и окружности, не проходящие через начало координат, функция $W=\frac{1}{z}$ отображает в окружности. Аналогично производит отображение функция более общего вида – дробно-линейная функция $W=\frac{az+b}{cz+d}$.

Примеры: 1. Дана линейная функция $W=2z-3i$. Найти
а) образ точки $z_0=1-i$;
б) образ прямой $x-y=2$;
в) образ окружности $|z+1-i|=\frac{1}{2}$;
г) образ треугольника ABO, если A(2,0), B(1,1), O(0,0).

Получим
а) $W_0=2z_0-3i$; $W_0=2(1-i)-3i=2-5i$.
Тогда точка $z_0=1-i$ отображается в точку $W_0=2-5i$ (рис. 20).

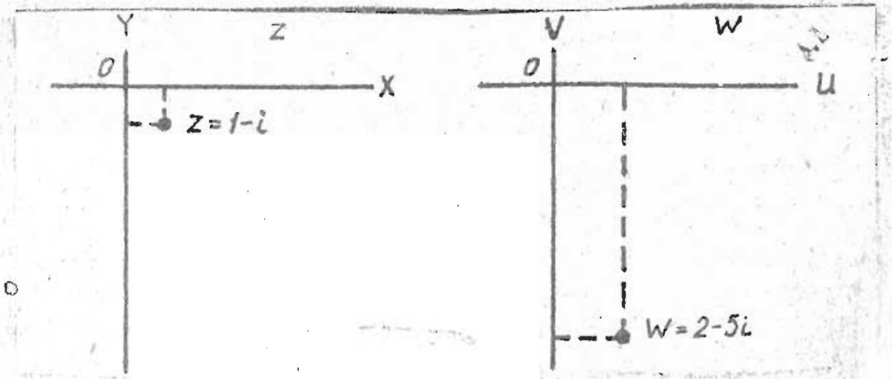

Рис. 20

б) Для нахождения образа линии выделим в данной функции действительную и мнимую части $W=2(x+iy)-3i=2x+i(2y-3)$. Получим $\begin{cases} u=2x; \\ v=(2y-3). \end{cases}$

Решим эту систему уравнений относительно x и y. Получим $x=\frac{u}{2}$, $y=\frac{v+3}{2}$. Подставив их в уравнение $x-y=2$, будем иметь $\frac{u}{2}-\frac{v+3}{2}=2$, $u-v=7$. Прямая $x-y=2$ отображается функцией $W=2z-3i$ в прямую $u-v=7$ (рис. 21).

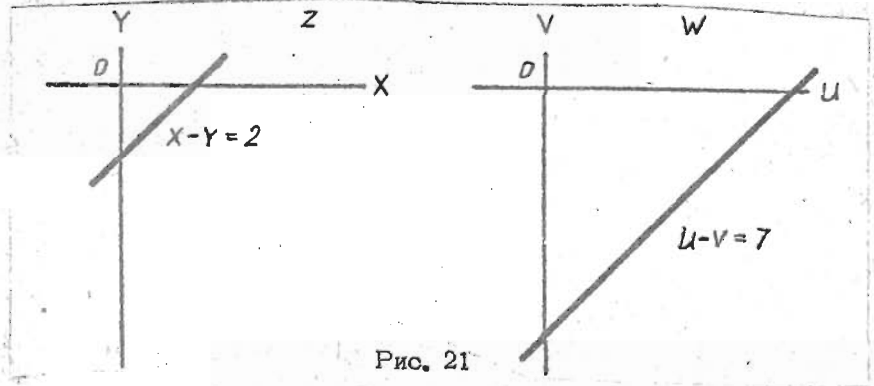

Рис. 21

в) Так как в уравнение заданной линии входит z, найдем z из данной функции $W=2z-3i$ и подставим в уравнение окружности $\left|\frac{W+3i}{2}+1-i\right|=\frac{1}{2}$. Получим $|W+2+i|=1$.
Следовательно, окружность $|z+1-i|=\frac{1}{2}$ переходит в окружность $|W+2+i|=1$ с помощью функции $W=2z-3i$. (рис. 22).

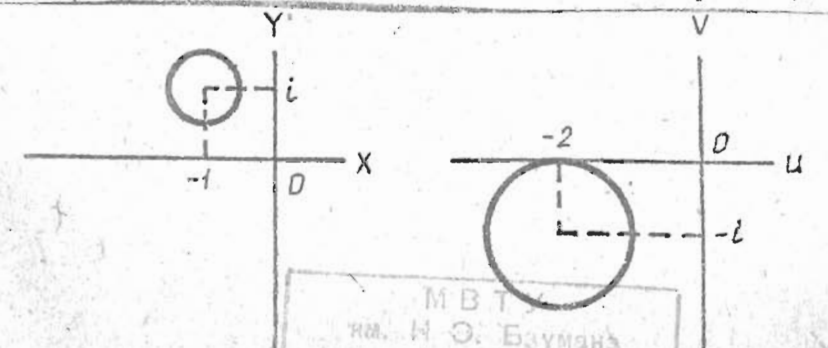

Рис. 22

г) При отыскании образа треугольника ABO нужно найти образы всех его сторон. Зная, что прямая переходит в прямую с помощью линейной функции, достаточно найти образы вершин треугольника ABO

$O(0,0)$, $z=0$, $W=-3i$, $O'(0;-3)$;

$A(2,0)$, $z=2$, $W(2)=4-3i$, $A'(4;-3)$;

$B(1,1)$, $z=1+i$, $W(1+i)=2(1+i)-3i=2-i$, $B'(2;-1)$.

Треугольник ABO переходит в треугольник A'B'O' на плоскости W, треугольник A'B'O' подобен треугольнику ABO (рис. 23).

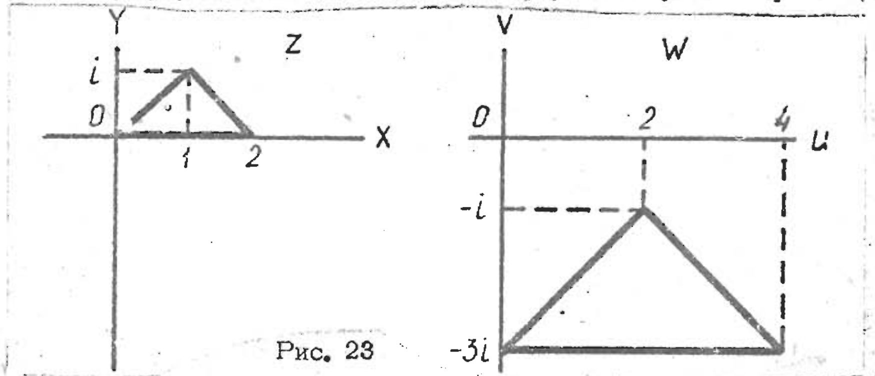

Рис. 23

Пример 2: дана функция $W=\frac{1}{z}$. Найти образы следующих линий:

а) $y=\frac{1}{3}x$; б) $x-y=\frac{1}{2}$;

в) $x^2+y^2=-4y$; г) $(x+1)^2+(y-1)^2=4$.

а) Так как функция $W=\frac{1}{z}$ осуществляет взаимно-однозначное соответствие между точками z и W, то можно решить ее относительно z и выделить действительную и мнимую части z

$$z=\frac{1}{W}=\frac{1}{u+iv}=\frac{u-iv}{u^2+v^2}=\frac{u}{u^2+v^2}-i\frac{v}{u^2+v^2}.$$

Тогда

$$\begin{cases} x=\dfrac{u}{u^2+v^2}; \\ y=-\dfrac{v}{u^2+v^2}. \end{cases}$$

Подставив полученные выражения для x и y в уравнение прямой $y=\frac{1}{3}x$, образ которой нужно найти, получим

$$-\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{1}{3}\,\frac{u}{v^2+u^2}; \quad v=-\frac{1}{3}u.$$

Прямая $y=\frac{1}{3}x$, проходящая через начало координат, отображается в прямую $v=-\frac{1}{3}u$, проходящую через начало координат (рис. 24).

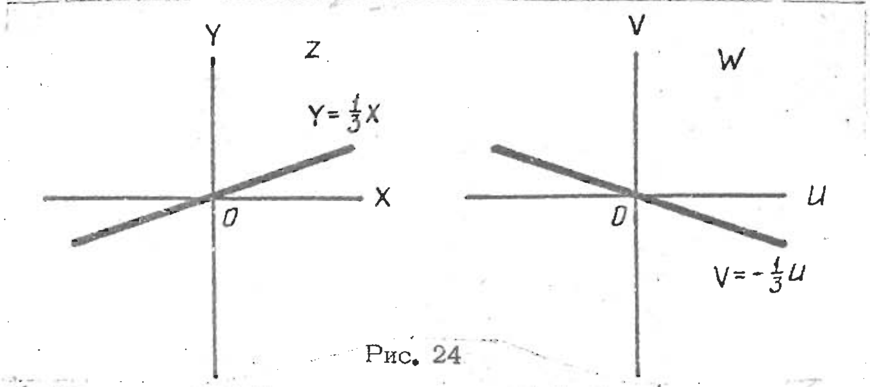

Рис. 24

б) Подставим x и y в уравнение прямой $x-y=\frac{1}{2}$, получим

$$\frac{u}{u^2+v^2}+\frac{v}{u^2+v^2}=\frac{1}{2}; \quad u^2+v^2-2u-2v=0;$$

$$(u-1)^2+(v-1)^2=2.$$

Прямая $x-y=\frac{1}{2}$, не проходящая через начало координат, переходит в окружность $(u-1)^2+(v-1)^2=2$, проходящую через начало координат (рис. 25).

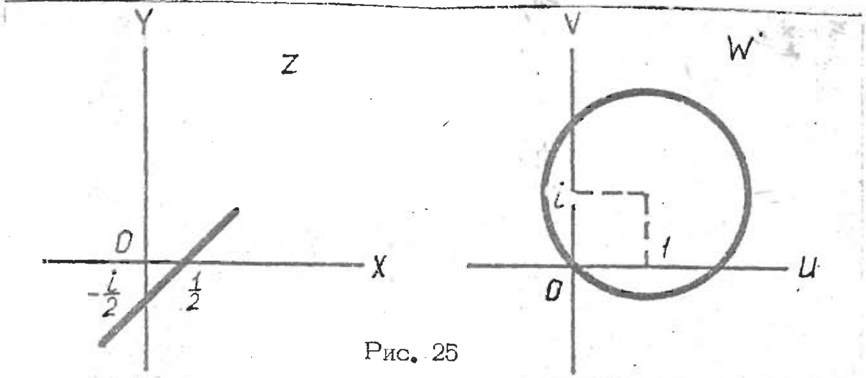

Рис. 25

в) В уравнение окружности $x^2+y^2=-4y$ подставим x и y, выраженные через u и v

$$\frac{u^2}{(u^2+v^2)^2}+\frac{v^2}{(u^2+v^2)^2}=\frac{4v}{(u^2+v^2)}; \quad \frac{1}{u^2+v^2}=\frac{4v}{u^2+v^2}.$$

Получим $4v=1$; $v=\frac{1}{4}$.

Окружность $x^2+y^2=-4y$, проходящая через начало координат, переходит в прямую $V=\frac{1}{4}$, не проходящую через начало координат (рис. 26).

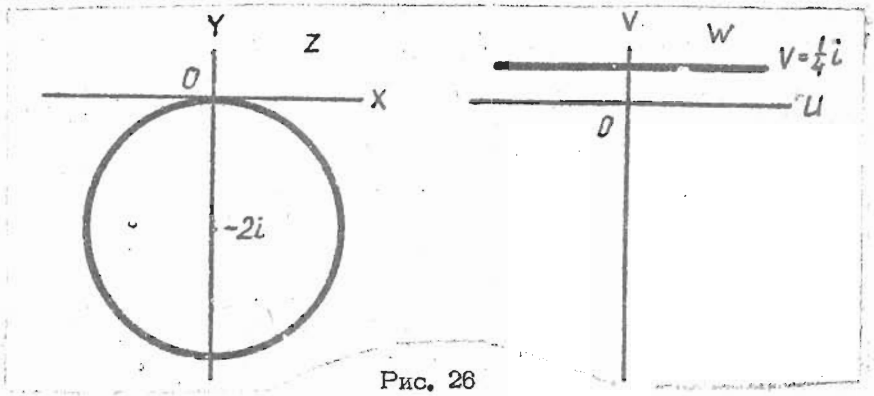

Рис. 26

г) Аналогично окружность $(x+1)^2+(y-1)^2=4$ переходит в

$$\left(\frac{u}{u^2+v^2}+1\right)^2+\left(-\frac{v}{u^2+v^2}-1\right)^2=4;$$

$$u^2+v^2-4-v-\frac{1}{2}=0;$$

$$\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=1.$$

Окружность, не проходящая через начало координат, переходит в окружность $\left(u-\frac{1}{2}\right)^2+\left(v-\frac{1}{2}\right)^2=1$, не проходящую через начало координат (рис. 27).

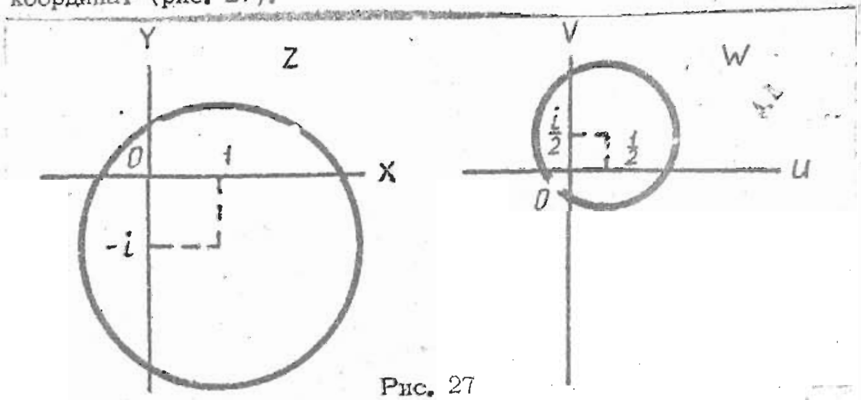

Рис. 27

Контрольное задание № 5

1. Дана функция $W=-2iz+1$. Найти образ треугольника OAB, если O(0,0), A(0,1), B(-1,0).

2. Дана функция $W=\frac{1}{z}$. Найти образ прямоугольника OABC, если O(0,0), A(4,0), B(4,2), C(0,2).

3. Дана функция $W=z^2$. Найти образ квадрата АВСД, если A(1,0), B(2,0), C(2,1), Д(1,1).

Задание на дом

Построить области, определяемые следующими неравенствами:

№ 4. $\begin{cases} |z-2|-|z+2|\geqslant 2; \\ \operatorname{Im} z \geqslant -\frac{1}{2}; \\ |z|<2. \end{cases}$ № 5. $\begin{cases} |z+1-i|\leqslant\sqrt{2}; \\ \frac{\pi}{2}\leqslant \arg(z-i)<\frac{3}{4}\pi. \end{cases}$ № 6. $\begin{cases} \operatorname{Re} z\geqslant 2 \\ |z-3|+|z+3|<5. \end{cases}$

№ 7. Дана функция $z=3z+2i$. Найти образ треугольника OAB, если O(0,0), A(1,1), B(-1,1).

№ 8. Дана функция $W=iz+3$. Найти образ треугольника OAB, если O(0,0), A(2,0), B(0,2).

№ 9. Дана функция $W=\frac{1}{z}$. Найти образ треугольника ABC, если A(1,0), B(0,-1), C(1,-1).

№ 10. Дана функция $W=\frac{1}{z}$. Найти образ квадрата OABC, если O(0,0), A(1,0), B(1,1), C(0,1).

№ 11. Дана функция $W=z^2$. Найти образ треугольника OAB, если O(0,0), A(1,0), B(1,1).

№ 12. Дана функция $W=\sqrt{z}$. Найти образ прямоугольника АВСД, если A(1,-2), B(2,-2), C(2,2), Д(1,2).

ЗАНЯТИЕ 3. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства, вычисление значения функции в точке. Аналитические функции, производная, отыскание аналитической функции по ее действительной или мнимой части

§ 1. Основные элементарные функции. Выделение действительной и мнимой частей. Вычисление функции в заданной точке

1. Основными элементарными функциями являются z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$, $\ln z$.

2. Функция e^z и ее свойства:

а) существует на всей плоскости z

б) $e^z=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$;

$$|e^z|=e^x;\quad \arg e^z=y;\quad u=e^x\cos y;\quad v=e^x\sin y; \tag{20}$$

в) периодична, имеет периодом $2\pi i$.

3. Связь показательной функции с круговыми и гиперболическими функциями

$$e^z = \operatorname{sh} z + \operatorname{ch} z;\quad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i};\quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z-e^{-z}}{2};$$

$$e^{iz} = \cos z + i\sin z;\quad \cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2};\quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z+e^{-z}}{2}. \qquad (21)$$

4. Связь круговых и гиперболических синусов и косинусов

$$\sin iz = i\operatorname{sh} z;\quad \operatorname{sh} iz = i\sin z;$$
$$\cos iz = \operatorname{ch} z;\quad \operatorname{ch} iz = \cos z. \qquad (22)$$

5. Основные формулы

$$\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2;$$
$$\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2;$$
$$\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$
$$\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2;$$
$$\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1;$$
$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1. \qquad (23)$$

6. Выделение действительной и мнимой частей у круговых и гиперболических синусов и косинусов. Используем формулы (23)

$$\sin z = \sin(x+iy) = \sin x \cos iy + \cos x \sin iy = \sin x \operatorname{ch} y + i\cos x \operatorname{sh} y$$
$$u = \sin x \operatorname{ch} y;\qquad v = \cos x \operatorname{sh} y.$$

Аналогично по формулам (23) выделяются мнимые и действительные части функций $\cos z, \operatorname{ch} z, \operatorname{sh} z$.

7. Логарифмическая функция и ее свойства:

а) существует во всех точках комплексной плоскости, кроме точки $z=0$.

б) $\ln z = \ln|z| + i\arg z = \ln\sqrt{x^2+y^2} + i\left(\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c\right);$

$$u = \frac{1}{2}\ln(x^2+y^2);\qquad v = \operatorname{arctg}\frac{y}{x} + c;$$
$$\operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\operatorname{Arg} z;\quad \operatorname{Ln} z = \ln|z| + i\arg z + 2k\pi i. \qquad (24)$$

в) $\operatorname{Ln} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Ln} z_1 + \operatorname{Ln} z_2$.

г) $\operatorname{Ln}\frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Ln} z_1 - \operatorname{Ln} z_2$.

д) $\operatorname{Ln} z^n = n\operatorname{Ln} z$.

8. Степенная функция $W = z^n$.

z^n выражается через показательную и логарифмическую функции следующим образом:

$$z^n = \left(e^{\ln z}\right)^n = e^{n\ln z}. \qquad (25)$$

9. Правило вычисления значения функции комплексного переменного.

Для вычисления значения функции при данном значении комплексного переменного z_0 нужно подставить в выражение функции это значение z_0, а затем выделить действительную и мнимую части, используя известные свойства данной функции.

Примеры: вычислить значение функции $W=f(z)$ в данной точке z_0.

1. $f(z) = e^z;\quad z_0 = \frac{1+i}{i}$.

$$e^{z_0} = e^{\frac{1+i}{i}} = e^{1-i} = e[\cos(-1) + i\sin(-1)] = e(\cos 1 - i\sin 1).$$

2. $f(z) = \operatorname{sh}\left(\bar z - \frac{\pi i}{3}\right);\quad z_0 = 2 + \frac{\pi}{3}i$.

$$\bar z_0 = 2 - \frac{\pi}{3}i;\quad \operatorname{sh}\left(\bar z_0 - \frac{\pi i}{3}\right) = \operatorname{sh}\left(2 - \frac{\pi i}{3} - \frac{\pi i}{3}\right) = \operatorname{sh}\left(2 - \frac{2}{3}\pi i\right) =$$
$$= \operatorname{sh}2\cdot\operatorname{ch}\frac{2}{3}\pi i - \operatorname{ch}2\operatorname{sh}\frac{2}{3}\pi i = \operatorname{sh}2\cos\frac{2}{3}\pi - i\operatorname{sh}2\sin\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}\operatorname{sh}2 -$$
$$- \frac{i\sqrt{3}}{2}\operatorname{ch}2 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-e^{-2}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{e^2+e^{-2}}{2} = -\frac{1}{4}(e^2-e^{-2}) - i\frac{\sqrt{3}}{4}(e^2+e^{-2}).$$

3. $f(z) = \operatorname{Ln}(1-z^2);\quad z_0 = -1+2i$.

$$f(z_0) = \operatorname{Ln}(1-z_0^2) = \operatorname{Ln}[1-(-1+2i)^2] = \operatorname{Ln}[1-1+4i+4] = \operatorname{Ln}(4+4i) =$$
$$= \ln|4+4i| + i\operatorname{Arg}(4+4i) = \ln 4\sqrt{2} + i\frac{\pi}{4} + 2k\pi i.$$

Контрольное задание № 6

Вычислить значение функции $W=f(z)$ в данной точке z_0.

1. $f(z) = e^{z^2};\quad z_0 = (1+i)\sqrt{\pi}$.
2. $f(z) = \cos z;\quad z_0 = \frac{\pi}{2} + i\ln 2$.
3. $f(z) = \ln(1+z^2);\quad z_0 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.
4. $f(z) = \operatorname{sh} z;\quad z_0 = \ln 3 + i\frac{\pi}{4}$.

§ 2. Аналитичность функции в области

1. Определение. Производной от функции $W=f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента в этой точке при условии, что приращение аргумента стремится к нулю

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{W(z_0+\Delta z)-W(z_0)}{\Delta z}.$$

Функция называется дифференцируемой в точке z_0, если она имеет в этой точке производную.

2. Условия Коши-Римана. Для того, чтобы функция $W=f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0, необходимо и достаточно:

а) существование частных производных $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial y}$ в точке z_0; *и их непрерывность*

б) выполнение условий Коши-Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$; $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ в точке z_0.

3. Определение. Функция $W=f(z)$ называется аналитической в области D, если она однозначна в этой области и дифференцируема во всех точках этой области.

4. Определение. Функция $W=f(z)$ называется аналитической в точке z_0, если существует некоторая окрестность точки z_0, в которой функция аналитична.

5. Отыскание области аналитичности функции.

Для определения области аналитичности функции $f(z)$ необходимо:

1) выделить действительную и мнимую части функции
$$f(z)=u(x,y)+iv(x,y);$$

2) проверить выполнение условий Коши-Римана;

3) множество тех точек, в которых частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ существуют и выполняются условия Коши-Римана, и будет являться областью аналитичности данной функции.

Примеры: найти область аналитичности функций.

1. $W=\operatorname{ch} z$

1) Выделим действительную и мнимую части функции
$$\operatorname{ch} z=\operatorname{ch}(x+iy)=\operatorname{ch}x\cos y+i\operatorname{sh}x\sin y;$$
$$u=\operatorname{ch}x\cos y;\quad v=\operatorname{sh}x\sin y.$$

2) Проверим выполнение условий Коши-Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\operatorname{sh}x\cos y;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=\operatorname{sh}x\cos y;\quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\operatorname{ch}x\sin y;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\operatorname{ch}x\sin y;\quad\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3) Так как частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ существуют во всех точках z и условия Коши-Римана выполнены во всех точках z, то функция $W=\operatorname{ch} z$ аналитична на всей комплексной плоскости.

2. $f(z)=\bar z+z^2$.

1) $f(z)=\bar z+z^2=(x-iy)+(x+iy)^2=x-iy+x^2-y^2+2xyi=$
$=x+x^2-y^2+i(2xy-y)$; $u=x+x^2-y^2$; $v=2xy-y$.

2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=1+2x;\quad \frac{\partial v}{\partial y}=2x-1;\quad \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial v}{\partial y}.$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-2y;\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2y;$$

3) $f(z)=\bar z+z^2$ не аналитична ни в одной точке.

3. $f(z)=z+\frac{1}{z}$.

1) $$f(z)=x+iy+\frac{x-iy}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+i\left(y-\frac{y}{x^2+y^2}\right);$$
$$u=x+\frac{x}{x^2+y^2};\quad v=y-\frac{y}{x^2+y^2}.$$

2) $$\frac{\partial u}{\partial x}=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial v}{\partial y}=1+\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\quad\Longrightarrow\quad \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2};\quad\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

3) Так как лишь только в точке $z=0$ частные производные не существуют, то данная функция аналитична во всех точках, кроме точки $z=0$.

Контрольное задание № 7

Найти область аналитичности для следующих функций:

1. $f(z)=az^3-bz$;
2. $f(z)=\ln z$;
3. $f(z)=z^2|z|$.

§ 3. Производная функции комплексного переменного. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части

1. Производная от функции комплексного переменного может быть найдена

1) по формуле $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$; (26)

2) по формуле $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$; (27)

3) $f(z)$ дифференцируется по обычным формулам дифференцирования, известным для функций действительного переменного, например, $(\sin z)'=\cos z$, $(\ln z)'=\frac{1}{z}$ и т.д.

2. Если функция $f(z)$ аналитична в области D, то ее действительная и мнимая части являются гармоническими функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}=0$. Условие гармоничности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ является необходимым условием аналитичности функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, но не достаточным.

3. Если дана одна гармоническая функция $u(x,y)$ или $v(x,y)$, то можно восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Действительно, пусть дана функция $u(x,y)$. Запишем производную от функции $f(z)$ по формуле (27) $f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}$. Зная $f'(z)$, можно найти первообразную $f(z)$ с помощью интегрирования.

Примеры: 1. Убедиться в том, что существует аналитическая функция $f(z)$, для которой функция $v(x,y)=3x+2xy$ может быть мнимой частью, и найти эту функцию.

1) Необходимым условием существования аналитической функции является тот факт, что ее действительная и мнимая части должны быть гармоническими функциями. Проверим, является ли данная функция $v(x,y)$ гармонической

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial v}{\partial x}&=3+2y; & \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}&=0;\\ \frac{\partial v}{\partial y}&=2x; & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}&=0;\end{aligned}\right| \Longrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

Функция $v(x,y)$ удовлетворяет уравнению Лапласа, следовательно, она гармоническая.

2) Найдем $f'(z)$ по формуле (26) $f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

$$f'(z)=2x+i(3+2y)=3i+2(x+iy)=3i+2z.$$

3) Найдем функцию $f(z)$, интегрируя $f'(z)$,

$$f(z)=\int(3i+2z)dz=3iz+z^2+C.$$

2. Убедиться, что существует аналитическая функция $f(z)$, для которой $u(x,y)=e^x\cos y$ является действительной частью, и найти эту функцию, зная, что $f(2\pi i)=1$.

1) Проверим выполнение необходимого условия аналитичности функции

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=e^x\cos y; & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}&=e^x\cos y;\\ \frac{\partial u}{\partial y}&=-e^x\sin y; & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}&=-e^x\cos y;\end{aligned}\right| \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$u(x,y)=e^x\cos y$ — гармоническая функция.

2) Найдем $f'(z)$

$$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}-i\frac{\partial u}{\partial y}=e^x\cos y+ie^x\sin y.$$

3) Выделим z

$$f'(z)=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z.$$

4) Найдем функцию по ее производной

$$f(z)=\int e^z dz=e^z+C.$$

5) Найдем C

$$f(2\pi i)=e^{2\pi i}+C=1;\quad 1+C=1;\quad C=0;\ \Rightarrow f(z)=e^z.$$

Контрольное задание № 8

Убедиться в том, что существует аналитическая функция, для которой известно либо u, либо v. Найти эту функцию.

1. $v=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$ $x>0$ 2. $u=\cos x\,\operatorname{ch} y$.

Задание на дом

Вычислить значение функции $f(z)$ в точке z_0

№ 13. $f(z)=\operatorname{sh}\left(z-\frac{\pi i}{3}\right)$; $z_0=2+\frac{\pi i}{3}$. № 14. $f(z)=e^{-\frac{1}{z}}$; $z_0=\frac{3i}{\pi}$.

№ 15. $f(z)=\sin z$; $z_0=\frac{\pi}{4}+i$. № 16. $f(z)=\ln(1+\operatorname{sh} z)$; $z_0=\frac{\pi i}{2}$.

№ 17. $f(z)=\ln\frac{z+1}{z}$; $z_0=\frac{i}{\sqrt{3}}$. № 18. $f(z)=\operatorname{Ln} z$; $z_0=\sqrt{3}-i$.

Найти область аналитичности для следующих функций:

№ 19. $f(z)=\cos z$. № 20. $f(z)=\sin\frac{1}{z}$.

№ 21. $f(z)=e^{z^2}$. № 22. $f(z)=z^n$.

Убедиться в том, что существует аналитическая функция, для которой известно либо $u(x,y)$, либо $v(x,y)$. Найти эту функцию

№ 23. $u(x,y)=2x^3-3xy^2-x$. № 24. $v(x,y)=\operatorname{ch}x\sin y+y$.

ЗАНЯТИЕ 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Отображения, осуществляемые элементарными функциями

§ 1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной

1. Модуль производной в точке z_0 $|f'(z_0)|$ есть коэффициент линейного растяжения в точке z_0.

2. Аргумент производной в точке z_0 $\arg f'(z_0)$ есть угол поворота касательной к кривой ℓ в точке z_0 при отображении ее в кривую L (рис. 28).

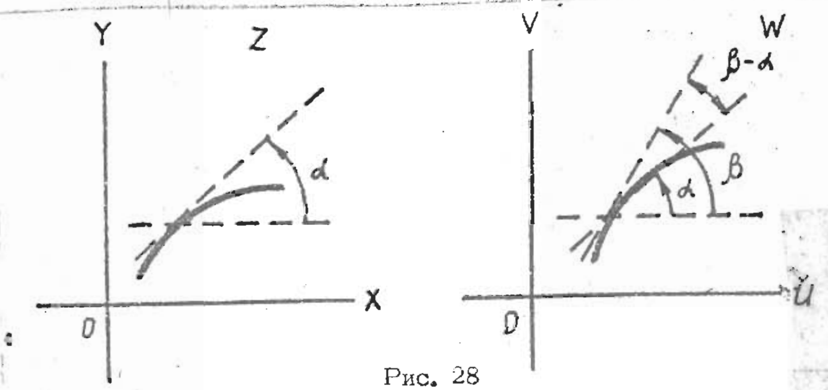

Рис. 28

Для всех кривых, проходящих через z_0, угол поворота будет постоянным, если $f'(z_0)\neq 0$.

Примеры: определить коэффициент линейного растяжения и угол поворота при отображении данной функцией $w=f(z)$ в данной точке z_0.

1. $w=\ln z$, $z_0=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.

1) Найдем производную и вычислим ее значение в точке

$$w'=\frac{1}{z};\quad w'(z_0)=\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i}=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}}=1-i.$$

2) Найдем модуль производной в точке z_0

$|w'(z_0)|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$.

$\sqrt{2}$ – коэффициент растяжения.

3) Найдем аргумент производной в точке z_0

$\arg w'(z_0)=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4}$.

Следовательно, при отображении функцией $\ln z$ в точке $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ касательная к любой линии, проходящей через точку z_0, поворачивается на угол $-\frac{\pi}{4}$, т.е. на $\frac{\pi}{4}$ по часовой стрелке.

2. $w=z^2$; $z_0=3+i$.

1) $w'=2z$; $w'(z_0)=2(3+i)=6+2i$.

2) $|w'(z_0)|=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$ – коэффициент линейного растяжения.

3) $\arg w'(z_0)=\operatorname{arctg}\frac{1}{3}\approx 18{,}5^\circ$ – угол поворота касательной к любой линии, проходящей через точку z_0.

3. Определить области, в которых при отображении данной функцией происходит сжатие или растяжение.

$w=z^2+2z$.

$w'=2z+2=2(z+1)$.

$|w'|<1$ при $|z+1|<0{,}5$.

Следовательно, внутри круга радиуса 0,5 с центром в точке -1 происходит сжатие во всех точках, кроме точки $z=-1$, в которой $w'(-1)=0$.

$|w'(z)|>1$ при $|z+1|>0{,}5$.

Следовательно, вне этого круга в каждой точке происходит растяжение.

Контрольное задание № 9

Найти линейный коэффициент растяжения и угол поворота для данных функций $w=f(z)$ в данной точке z_0.

1. $f(z)=e^z$; $z_0=\ln 2+i\frac{\pi}{3}$. 2. $w=\frac{1}{z-3}$; $z_0=1-3i$.

3. Определить область растяжения и сжатия при отображении функцией $W=\ln(z-1-i)$.

§ 2. Конформные отображения

1. Свойство консерватизма углов.

Если $W=f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$, то две кривые ℓ_1 и ℓ_2, проходящие через точку z_0, отображаются в кривые L_1 и L_2 так, что угол между касательными к ℓ_1 и ℓ_2 равен углу между касательными к L_1 и L_2. Это свойство называется свойством консерватизма углов.

2. Определение. Отображение $W=f(z)$ называется конформным в точке z_0 при $f'(z_0)\neq 0$, если оно обладает двумя свойствами:

1) свойством консерватизма углов,

2) постоянством растяжений.

Это означает, что с точностью до бесконечно-малых при таком отображении фигура переходит в подобную.

3. Теорема. Для того, чтобы отображение функции $W=f(z)$ было конформным, в точке z_0 необходимо и достаточно, чтобы $W=f(z)$ была аналитична в точке z_0 и $f'(z_0)\neq 0$.

4. Свойства конформных отображений.

1) Теорема Римана. Существует аналитическая функция $f(z)$, отображающая взаимно однозначно и конформно одну односвязную область на другую, если ни одна из этих областей не совпадает со всей расширенной плоскостью или с плоскостью с одной выколотой точкой.

2) При отображении аналитической функцией

а) внутренние точки области переходят во внутренние точки;

б) граничные точки переходят в граничные точки;

в) сохраняется направление обхода границы.

3. Главная задача конформных отображений – отыскание функции, отображающей данную область плоскости z в данную область плоскости W. Эта задача не является однозначной. Для отыскания единственной аналитической функции нужно задать дополнительные условия.

Пусть область D плоскости z имеет границу ℓ. Область G плоскости W имеет границу L. Нужно найти аналитическую функцию $f(z)$, отображающую D в G и ℓ в L. Для единственности решения возможны следующие дополнительные условия:

1) точка z_0 отображается в точку W_0, т.е. $f(z_0)=W_0$ и известен угол поворота в точке z_0, т.е. $\arg f'(z_0)=\varphi$;

2) известен образ одной внутренней точки $z_1\in D$, $f(z_1)=W_1$ и одной граничной точки $z_2\in\ell$, $f(z_2)=W_2$, $W_1\in G$, $W_2\in L_2$;

3) известны образы трех граничных точек $z_1, z_2, z_3\in\ell$,

$$W_1=f(z_1);\quad W_2=f(z_2);\quad W_3=f(z_3)\in L.$$

§ 3. Отображения, осуществляемые основными элементарными функциями

1. Линейная функция $W=az+b$.

Так как $W'=a\neq 0$ для любого z, то линейная функция аналитична на всей комплексной плоскости и дает конформное отображение в каждой точке.

Так как $W'=a$, то $|a|$ дает коэффициент растяжения, постоянный во всех точках, а аргумент a дает угол поворота, также постоянный во всех точках. Запишем a в виде $a=|a|e^{i\alpha}$.

Тогда функция $W=az=|a|e^{i\alpha}z$ осуществляет поворот на угол α и растяжение в $|a|$ раз (или преобразование подобия с коэффициентом подобия $|a|$ и центром подобия в начале координат). Прибавление b дает параллельный сдвиг на вектор b.

2. Функция $W=\frac{1}{z}$ конформна на всей расширенной комплексной плоскости. Точке 0 соответствует бесконечно удаленная точка, а бесконечно удаленной точке – точка $z=0$.

1) Функция $W=\frac{1}{z}$ отображает окружность в окружность, если прямую считать окружностью бесконечно большого радиуса.

2) Функция $W=\frac{1}{z}$ осуществляет два симметричных отображения: относительно оси OX и относительно единичной окружности.

Замечание: точки M и M_1 называются симметричными относительно окружности с центром в начале координат и радиусом R, если $OM\cdot OM_1=R^2$ (рис. 29).

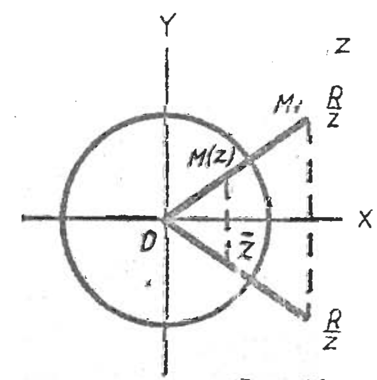

Рис. 29

3. Дробно-линейная функция $w = \frac{az+b}{cz+d}$ конформна на всей расширенной комплексной плоскости, если $ad - bc \neq 0$. Функция может быть получена с помощью линейного преобразования из функции $\frac{1}{z}$, поэтому обладает теми же свойствами.

4. Степенная функция $w = z^n$ конформна на всей плоскости, кроме точки $z = 0$. Она отображает (рис. 30) сектор в плоскости z $\begin{cases} |z| \le r; \\ \alpha \le \arg z \le \beta \end{cases}$

в сектор в плоскости w $\begin{cases} |w| \le r^n \\ n\alpha \le \arg w \le n\beta. \end{cases}$

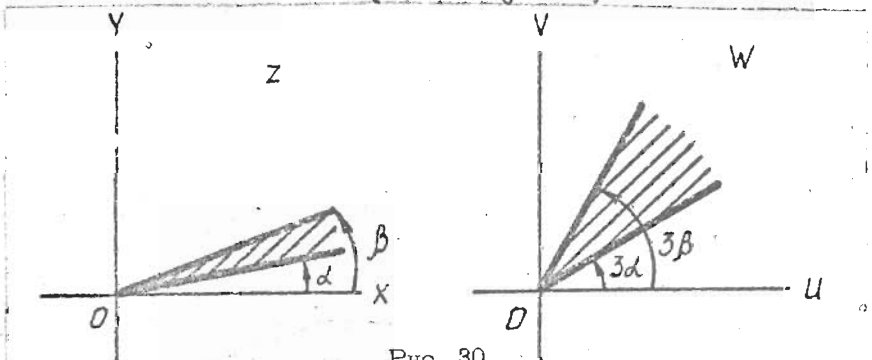

Рис. 30

5. $w = \sqrt[n]{z}$, n – целое положительное. Функция $\sqrt[n]{z}$ многозначна. Для конформности необходима однозначность функции, поэтому будем рассматривать одну ветвь этой функции, соответствующую аргументу $\frac{\arg z}{n}$. Эта ветвь будет конформна всюду, кроме точки $z = 0$. Она осуществляет преобразование, обратное преобразованию степенной функции.

6. Показательная функция $w = e^z$ конформна на всей комплексной плоскости. Она отображает (рис. 31) прямоугольник на плоскости z $\begin{cases} a \le x \le b; \\ c \le y \le d \end{cases}$ в кольцевой сектор на плоскости

w $\begin{cases} c < \arg w < d; \\ e^a \le |w| \le e^b, \end{cases}$

а полосу $\begin{cases} -\infty < x < \infty; \\ 0 \le y \le \pi \end{cases}$ – на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \ge 0$ (рис. 32).

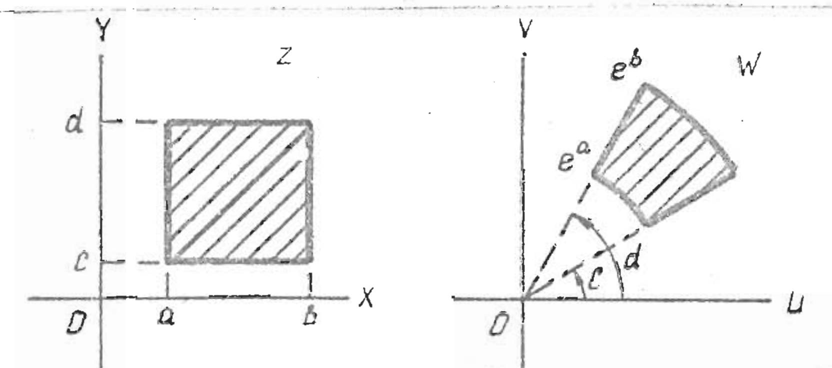

Рис. 31

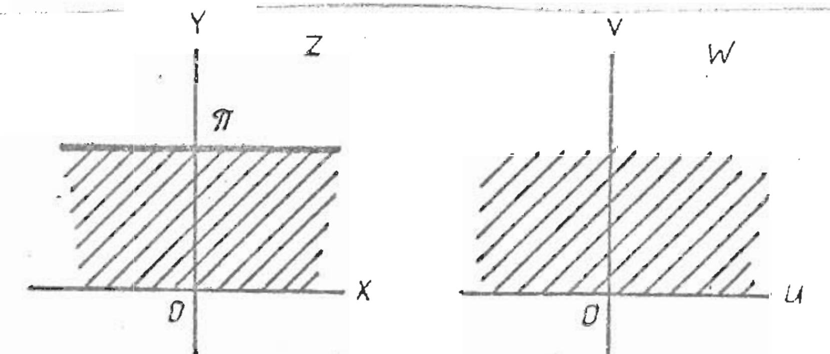

Рис. 32

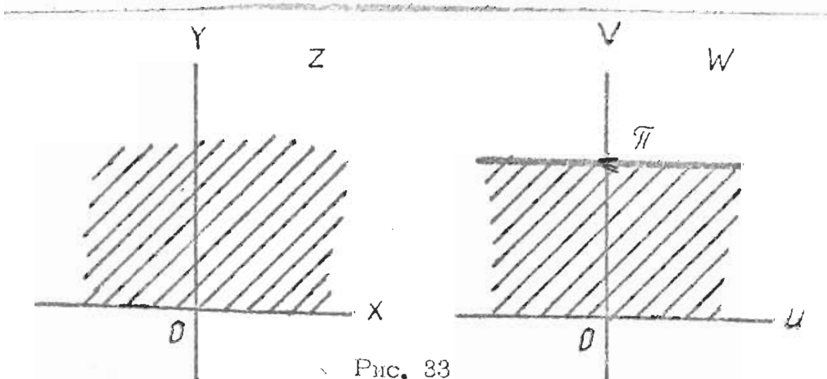

Рис. 33

7. Логарифмическая функция $w = \ln z$ конформна всюду, кроме $z = 0$. Она осуществляет отображение, обратное отображению показательной функции (рис. 33). Верхняя полуплоскость

$\operatorname{Im} z \geq 0$ отображается в полосу $\begin{cases}-\infty < u < \infty;\\ 0 \leq v \leq \pi\end{cases}$

8. Круговой синус $w = \sin z$ отображает (рис. 34) вертикальную полосу $\begin{cases}-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2};\\ 0 \leq y < \infty\end{cases}$ в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \geq 0$.

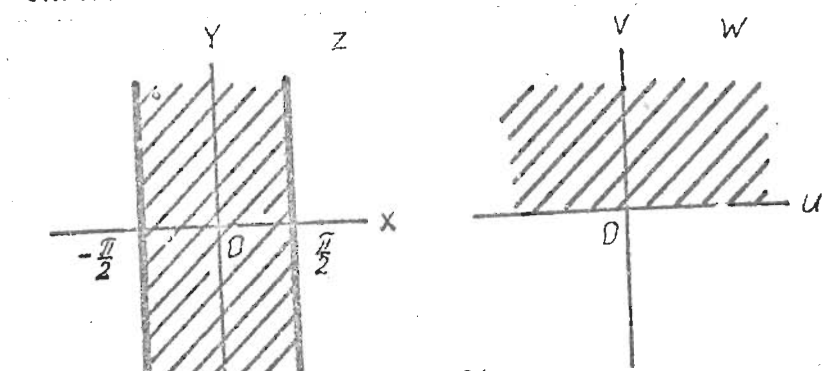

Рис. 34

Примеры: 1. Найти точки, в которых нарушается конформность отображения функцией $w = 2z^3 - 3z^2 - 12z$.

Данная функция аналитична во всех точках плоскости, значит конформность будет нарушаться в точках, в которых производная обратится в ноль. Найдем производную $w' = 6z^2 - 6z - 12$ и ее нули. $w' = 6(z+1)(z-2) = 0$ в точках $z = -1$ и $z = 2$. Следовательно, в этих точках нарушается конформность отображения.

2. Найти линейную функцию, отображающую треугольник ABC в треугольник A'B'C', если A(0,0), B(1,1), C(2,0), A'(2,2), B'(0,0), C'(-2,2) (рис. 35).

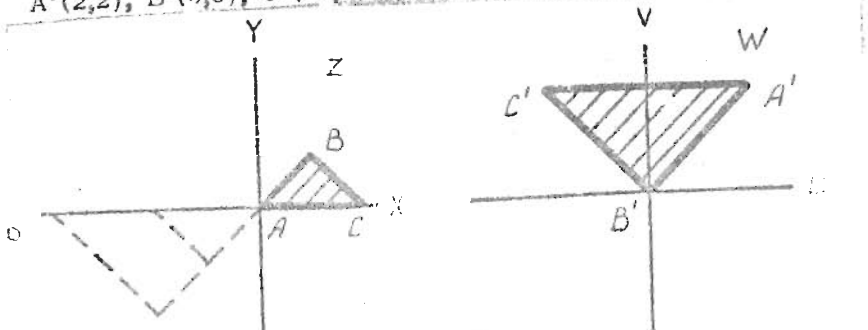

Рис. 35

Из рис. 35 видно, что нужно произвести поворот Δ ABC на угол π. Для этого z умножим на $e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, т.е. на -1. Далее произведем преобразование подобия, коэффициент которого равен коэффициенту растяжения 2, так как $\left|\frac{A'C'}{AC}\right| = 2$. Следовательно, $-z$ умножим на 2, получим промежуточную функцию $w_1 = -2z$, отображающую Δ ABC в Δ A"B"C". Теперь нужно осуществить параллельный перенос всего треугольника. Перенесем точку A в A', т.е. добавим координаты точки A', получим искомую функцию

$$w = -2z + 2 + 2i.$$

3. Найти дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\operatorname{Re} z > 0$ в круг $|w| < 1$ так, чтобы точки $-i, 0, i$ перешли в точки $-i, 1, i$ (рис. 36).

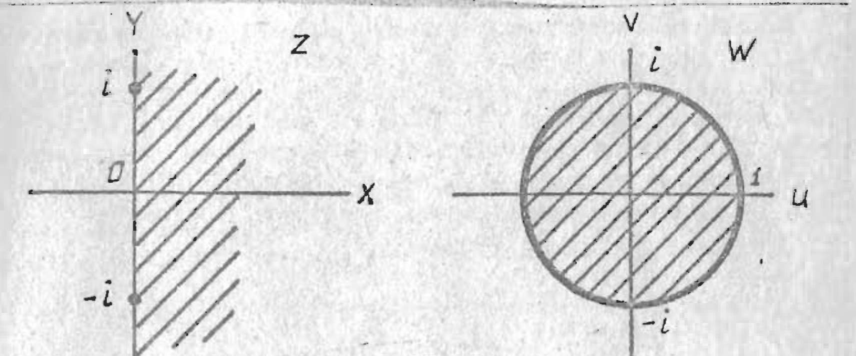

Рис. 36

Находим функцию в виде $w = \frac{az+b}{cz+d}$. Составим уравнения относительно коэффициентов, подставляя в функцию значения данных точек z и соответствующих им точек w. Получим

$$\begin{cases}-i = \dfrac{-ai+b}{-ci+d};\\[2mm] 1 = \dfrac{b}{d};\\[2mm] i = \dfrac{ai+b}{ci+d}.\end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим $a = b$, $c = -b$; $d = b$.

Искомая функция имеет вид $w = \frac{bz+b}{-bz+b} = -\frac{z+1}{z-1}$.

4. Найти функцию, отображающую полукруг $|z|<3, y<0$, на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} W \geq 0$ (рис. 37).

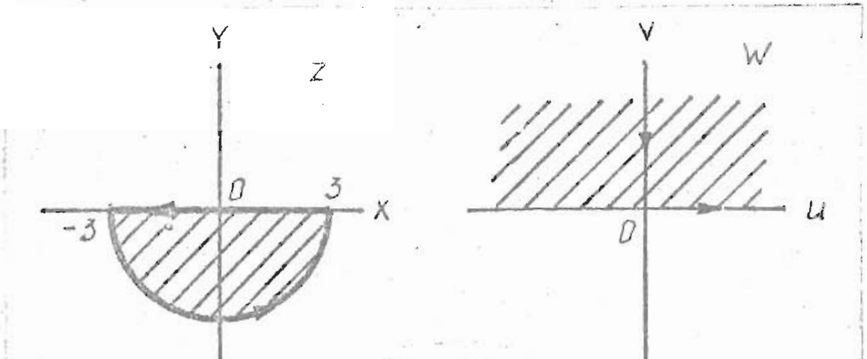

Рис. 37

Окружность составляет с осью $0X$ прямой угол, следовательно, окружность и хорду нужно отобразить в пару перпендикулярных прямых, а именно, можно отобразить данный полукруг в первую четверть плоскости W. Выберем положительный обход области, т.е. такой обход, чтобы область оставалась слева. Переведем окружность от точки -3 до точки 3 в полуось $0U$ от точки 0 до бесконечно-удаленной точки. Тогда точка 3 должна перейти в ∞, а -3 – в 0. Получим

$$\begin{cases} \dfrac{+3a+b}{+3c+d} = \infty; \\ \dfrac{-3a+b}{-3c+d} = 0. \end{cases}$$

Откуда $d=-3c$, $b=+3a$, $W=\dfrac{a(z+3)}{c(z-3)}$.

Для определения $\frac{a}{c}$ используем тот факт, что хорда от точки 3 до точки -3 должна перейти в полуось $0V$, поэтому отобразим любую точку хорды в любую точку полуоси $0V$, например точку $z=0$ – в точку $W=i$. Получим $i=-\frac{a}{c}$. Функция

$W=-i\,\dfrac{z+3}{z-3}$ отобразит полукруг в 1 четверть плоскости W.

Теперь развернем 1 четверть полуплоскости W на всю полуплоскость W. Для этого угол нужно удвоить, а, следовательно, функцию нужно возвести в квадрат. Получим

$$W=-\left(\frac{z+3}{z-3}\right)^2.$$

5. Найти функцию, отображающую лунку

$$\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1; \\ x^2+(y-1)^2 \geq 2; \\ y<0 \end{cases}$$

в верхнюю полуплоскость. Найдем угол между дугами данной лунки. Окружность с центром в начале координат составляет с осью $0X$ угол $\frac{\pi}{2}$. Найдем угол наклона к оси $0X$ второй дуги. Для этого определим y'

$$2x+2(y-1)y'=0; \quad y'=-\frac{x}{y-1}; \quad y'(1,0)=1.$$

Вторая дуга составляет с осью $0X$ угол $\frac{\pi}{4}$, следовательно, угол между дугами $\frac{\pi}{4}$. Окружности, составляющие угол $\frac{\pi}{4}$, можно перевести в прямые под таким же углом. Переведем нижнюю окружность в полуось $0U$, точку -1 – в 0, а точку 1 – в ∞. Получим $W=\frac{b}{c}\cdot\frac{z+1}{z-1}$. Верхнюю окружность переведем в луч $A0$, составляющий с осью $0U$ угол $\frac{\pi}{4}$. Произвольную точку окружности переведем в такую точку луча, чтобы получить $\frac{b}{c}=1$. Тогда функция $W=\frac{z+1}{z-1}$ отображает данную лунку в область $0 \leq \arg W \leq \frac{\pi}{4}$. Чтобы получить верхнюю полуплоскость, нужно этот угол умножить на 4, а, следовательно, функцию возвести в четвертую степень. Получим искомую функцию $W=\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^4$.

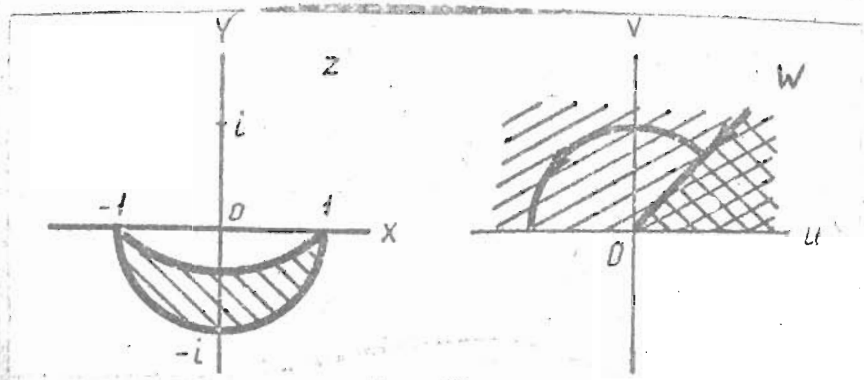

Рис. 38

6. Найти функцию, отображающую полосу шириной 2, идущую под углом $\frac{\pi}{3}$ к оси $0X$, на верхнюю полуплоскость (рис. 39).

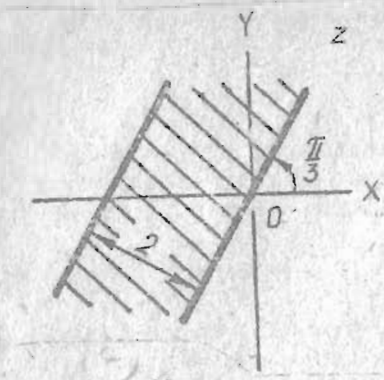

Рис. 39

1) Повернем полосу на угол $-\frac{\pi}{3}$. Для этого z умножим на $e^{-\frac{\pi}{3}i}$

$$W_1 = ze^{-\frac{\pi}{3}i} = z\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right] = z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

2) Растянем полосу так, чтобы ее ширина равнялась π. Для этого функцию W_1 умножим на π и разделим на 2

$$W_2 = \frac{\pi}{2}W_1 = \frac{\pi}{2}z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

3) Полученная полоса функцией $W=e^{W_2}$ отображается на верхнюю полуплоскость. Следовательно, искомая функция будет иметь вид

$$W = e^{\frac{\pi}{2}z\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}; \qquad W = e^{\frac{\pi}{4}(1-\sqrt{3}i)z}.$$

Контрольное задание № 10

1. Найти линейную функцию, отображающую Δ ABC в Δ A'B'C', если A(−2,0), B(0,2), C(2,0), A'(2,0), B'(1,−1), C'(0,0).

2. Найти такую дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ в круг $|W|<2$, чтобы точки −1,0,1 перешли соответственно в точки −2, $-2i$, 2.

3. Найти функцию, отображающую полукруг $|z|\leq 1$, $\mathrm{Im}\, z \geq 0$ в верхнюю полуплоскость.

Задание на дом

Найти линейный коэффициент растяжения и угол поворота при отображении с помощью функции $W=f(z)$ в точке z_0

№ 25. $f(z)=z^3$; $z_0 = 1-i$. № 26. $W=\frac{z}{z-1}$; $z_0 = 2+\sqrt{3}i$.

№ 27. Определить, в каких точках нарушается конформность отображения функции $W = 2z^3 - 15z^2 + 36z$.

№ 28. Найти линейную функцию, отображающую Δ ABC в Δ A'B'C', если A(0,2), B(4,2), C(2,0), A'(−3,0), B'(−3,6), C'(0,3).

№ 29. Найти такую дробно-линейную функцию, отображающую полуплоскость $\mathrm{Re}\, z \leq 0$ в круг $|W| \leq 2$, чтобы точки $-i, 0, i$ перешли в точки $-2i, 2, 2i$.

№ 30. Найти функцию, отображающую сегмент $\begin{cases} x^2+y^2\leq 12; \\ y \geq 3 \end{cases}$ в верхнюю полуплоскость.

№ 31. Найти функцию, отображающую лунку $\begin{cases} |z| \leq 1; \\ |z+i| \geq \sqrt{2}. \end{cases}$ в верхнюю полуплоскость.

№ 32. Найти функцию, отображающую полосу шириной 3 и составляющую с осью OX угол $\frac{\pi}{4}$ (рис. 40).

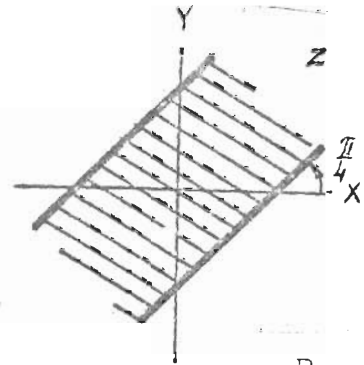

Рис. 40

ЗАНЯТИЕ 5. Ряды в комплексной области

§ 1. Числовые ряды с комплексными членами

1. Признаки сходимости:

а) ряд с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ сходится тогда (и только тогда), когда сходятся два ряда с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$;

б) ряд с комплексными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n + ib_n)$ сходится, если сходится ряд из модулей его членов, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n^2 + b_n^2}.$$

2. Определения:

а) ряд называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из модулей членов данного ряда;

б) ряд называется условно сходящимся, если он сходится, а ряд из модулей его членов расходится.

Примеры: исследовать на сходимость следующие числовые ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1+ni}{n^2}$.

Выделим два ряда из действительных членов $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

Первый ряд сходится, как ряд Дирихле ($p=2>1$), второй ряд расходится, как гармонический ряд. Следовательно, данный ряд расходится.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n\cdot 3^n i}{6^n}$.

Выделим два ряда с действительными членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$.

Первый ряд сходится, как геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{3}<1$, второй ряд сходится по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\cdot 2^n}{2^{n+1}\cdot n}=\frac{1}{2}<1 .$$

Следовательно, данный ряд сходится.

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(4-3i)^n\cdot n}$.

В данном ряде сложнее произвести выделение действительной и мнимой частей, поэтому применим второй признак. Для этого составим ряд из модулей

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{(4-3i)^n\cdot n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|4-3i|^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\sqrt{16+9})^n\cdot n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{5^n\cdot n} .$$

Полученный ряд сходится по первому признаку сравнения, так как его члены меньше членов геометрической прогрессии, со знаменателем, меньшим единицы $\left(\frac{1}{5^n\cdot n}<\frac{1}{5^n}\right)$.

Следовательно, по второму признаку сходимости данный ряд сходится. По первому определению он является абсолютно сходящимся.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Рассмотрим ряд из модулей $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\frac{i^n}{(n+1)\ln(n+1)}\right|=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

Исследуем полученный ряд с помощью интегрального признака сходимости $\int\limits_k^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_k^{\infty}=\infty$.

Ряд из модулей расходится, но из этого не следует, что расходится и данный ряд. Поэтому нужно данный ряд исследовать по первому признаку, т.е. исследовать ряды из действительной и мнимой частей. Выделим эти ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{(n+1)\ln(n+1)}=\frac{i}{2\ln 2}-\frac{1}{3\ln 3}-\frac{i}{4\ln 4}+\frac{1}{5\ln 5}+\frac{i}{6\ln 6}-\ldots=$$

$$=\left(-\frac{1}{3\ln 3}+\frac{1}{5\ln 5}-\frac{1}{7\ln 7}+\ldots\right)+i\left(\frac{1}{2\ln 2}-\frac{1}{4\ln 4}+\frac{1}{6\ln 6}-\ldots\right)=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\ln(2n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\ln 2n} .$$

Оба ряда сходятся по признаку Лейбница, так как члены этих рядов монотонно убывают и пределы общих членов равны нулю. Так как ряды из модулей расходятся, то они сходятся условно; данный ряд тоже сходится условно.

Контрольное задание № 11

Исследовать на сходимость следующие ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(1+i)^n}{(2-3i)^n}$;   2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{i^n}{n}$;   3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{n}}$.

§ 2. Степенные ряды с комплексными членами

1. Определение. Ряд вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$, где c_n, a – постоянные комплексные числа, а $z=x+iy$ – переменная комплексная величина – называется степенным рядом.

2. Область сходимости степенного ряда.

Степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ сходится в круге, с центром в точке a и радиусом R , т.е. в области $|z-a|<R$. R – радиус сходимости степенного ряда.

Если $R=0$, то ряд сходится только в точке $z=a$.

Если $R=\infty$, то ряд сходится на всей комплексной плоскости.

3. Способ отыскания области сходимости степенного ряда.

Для нахождения круга сходимости степенного ряда составим ряд из модулей данного ряда и применим к нему признак Даламбера или радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z-a|^{n+1}|c_{n+1}|}{|z-a|^n|c_n|}=|z-a|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right|=\frac{|z-a|}{R}.$$

Если $\frac{|z-a|}{R} < 1$ или $|z-a| < R$, то ряд сходится, если $|z-a| > R$, то расходится. Следовательно, внутри круга $|z-a| < R$ данный ряд сходится абсолютно, вне круга ряд расходится, так как расходится ряд из модулей и предел общего члена ряда отличен от нуля. На окружности могут быть как точки сходимости, так и точки расходимости.

4. Исследование поведения ряда в заданных точках.

Для исследования сходимости степенного ряда в заданной точке нужно установить, где лежит эта точка. Если точка лежит внутри круга сходимости, то в ней ряд сходится абсолютно. Если точка лежит вне круга сходимости, то в ней ряд расходится. Если точка лежит на окружности, то в ней ряд может как сходиться, так и расходиться.

5. Исследование поведения степенного ряда на окружности – границе области сходимости.

В граничных точках $|z-a| = R$. Поэтому подставим в степенной ряд из модулей вместо $|z-a|$ его значение R. Получим знакоположительный числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$. При исследовании этого ряда возможны следующие три случая:

1) $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$ сходится. Тогда во всех точках, лежащих на окружности $|z-a|=R$, степенной ряд сходится абсолютно.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|R^n$ расходится и $\lim_{n\to\infty}|c_n|\cdot R^n = K \neq 0$, т.е. не выполняется необходимый признак сходимости. Тогда степенной ряд во всех точках окружности $|z-a|=R$ расходится.

3) $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n|\cdot R^n$ расходится и $\lim_{n\to\infty}|c_n|\cdot R^n = 0$. Тогда на границе могут быть как точки расходимости, так и точки условной сходимости. В этом случае данную точку нужно подставить в данный ряд и исследовать на сходимость полученный числовой ряд.

Примеры: определить область сходимости данных степенных рядов и исследовать сходимость этих рядов в заданных точках

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(z+1-2i)^{2n}}{4^n\cdot n\sqrt{n+1}}$.

1) Составим ряд из модулей членов данного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^n(z+1-2i)^{2n}}{4^n\cdot n\sqrt{n+1}}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z+1-2i|^{2n}}{4^n\cdot n\sqrt{n+1}}.$$

2) Применим к полученному ряду признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z+1-2i|^{2n+2}\cdot 4^n\cdot n\sqrt{n+1}}{4^{n+1}(n+1)\sqrt{n+2}\,|z+1-2i|^{2n}} = \frac{|z+1-2i|^2}{4}.$$

3) Ряд будет сходиться, если полученный предел будет меньше единицы,

$$\frac{|z+1-2i|^2}{4} < 1;\quad |z+1-2i| < 2.$$

Следовательно, областью сходимости данного степенного ряда является круг с центром в точке $-1+2i$ и радиусом $R=2$. Внутри круга ряд сходится абсолютно.

4) Исследуем поведение ряда на границе области сходимости, т.е. в точках окружности $|z+1-2i|=2$. Подставим в ряд из модулей вместо $|z+1-2i|$ его значение 2. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{4^n n\sqrt{n+1}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n+1}}.$$

Этот ряд сходится, как ряд Дирихле ($p=1{,}5>1$). Следовательно, в любой граничной точке данный ряд сходится абсолютно. Областью сходимости данного ряда будет $|z+1-2i|\le 2$.

5) Выясним, как ведет себя данный ряд в точках z_1, z_2, z_3.

$z_1=-1+4i$. Подставим z_1 в $|z+1-2i|$ вместо z. Получим $|-1+4i+1-2i|=2$. Значит точка z_1 лежит на границе. Следовательно, в точке z_1 степенной ряд сходится абсолютно.

$z_2=1$. Подставим z_2 в $|z+1-2i|$ вместо z. Получим $|1+1-2i|=\sqrt{4+4}=2\sqrt{2}$. Так как точка z_2 лежит вне круга сходимости, в этой точке ряд расходится.

$z_3=1+2i$. Подставим z_3 в $|z+1-2i|$ вместо z. Получим $|1+2i+1-2i|=2$. Точка лежит на границе и в ней ряд сходится абсолютно (рис. 41).

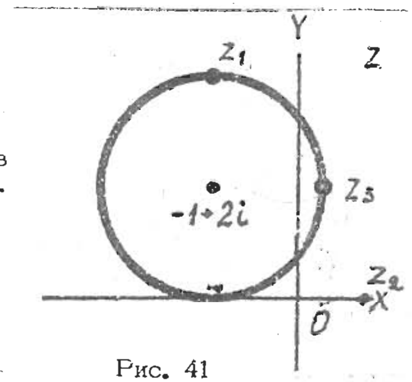

Рис. 41

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n(z-1+i)^n;\ z_1=-2+2i;\ z_2=2-2i;\ z_3=1-4i.$

1) Запишем ряд из модулей $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n|z-1+i|^n$.

2) Применим к полученному знакоположительному ряду радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n|z-1+i|^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+1}|z-1+i|=\frac{|z-1+i|}{3}.$$

3) Ряд будет сходиться, если полученный предел будет меньше единицы

$$\frac{|z-1+i|}{3}<1\ ;\quad |z-1+i|<3.$$

Областью сходимости является круг с центром в точке $1-i$ и радиусом 3.

4) Исследуем поведение ряда на границе, т.е. в точках $|z-1+i|=3$. Для этого в ряд из модулей подставим вместо $|z-1+i|$ его значение 3. Получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+1}\right)^n\cdot 3^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n}{3n+1}\right)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n.$$

Исследуем поведение n-го члена полученного ряда

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)^{-(3n+1)}\right]^{-\frac{n}{3n+1}}=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\neq 0.$$

Так как предел n-го члена полученного числового ряда при $n\to\infty$ отличен от нуля, то ряд расходится, а следовательно, во всех граничных точках расходится данный степенной ряд.

5) Исследуем поведение ряда в заданных точках z_1, z_2, z_3.

$z_1=-2+2i$. Подставим в $|z-1+i|$. Получим

$$|-2+2i-1+i|=|-3+3i|=\sqrt{9+9}=3\sqrt{2}>3.$$

Точка z_1 лежит вне круга, в точке z_1 ряд расходится.

$z_2=2-2i$. Подставим в $|z-1+i|$. Получим

$$|2-2i-1+i|=|1-i|=\sqrt{2}<3.$$

z_2 лежит в круге сходимости, в точке z_2 ряд сходится абсолютно.

$z_3=1-4i$. Подставим в $|z-1+i|$. Получим $|1-4i-1+i|=3$.

z_3 лежит на границе, в точке z_3 ряд расходится.

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{(3i)^n(n+1)\ln(n+1)}$; $z_1=3+i$; $z_2=5-i$; $z_3=2+2i$.

1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|z-2+i|^n}{3^n(n+1)\ln(n+1)}$.

2) По признаку Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|z-2+i|^{n+1}\cdot 3^n(n+1)\ln(n+1)}{3^{n+1}(n+2)\ln(n+2)|z-2+i|^n}=\frac{|z-2+i|}{3}.$$

3) Область сходимости $|z-2+i|<3$.

4) На границе $|z-2+i|=3$, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n(n+1)\ln(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Применим интегральный признак

$$\int_k^{\infty}\frac{dx}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_k^{\infty}=\infty.$$

Следовательно, ряд из модулей расходится.

Проверим необходимый признак сходимости

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}=0.$$

Так как необходимый признак выполнен, на границе могут быть как точки расходимости, так и точки условной сходимости.

5) Сходимость в точках z_1, z_2, z_3.

$z_1=3+i$. $\quad |3+i-2+i|=|1+2i|=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}<3$,

в z_1 ряд сходится абсолютно.

$z_2=5-i$.

$|5-i-2+i|=3$.

Так как эта точка лежит на границе, а на границе поведение ряда точно не определено, то точку z_2 нужно подставить в данный степенной ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(5-i-2+i)^n}{(3i)^n(n+1)\ln(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{3^n i^n(n+1)\ln(n+1)}=$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-i^n}{(n+1)\ln(n+1)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)\ln(2n+1)}+i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n\ln 2n}.$$

Полученный ряд сходится, так как по признаку Лейбница сходятся ряды, составленные из действительных и мнимых частей. Следовательно, данный степенной ряд в точке z_2 сходится условно.

$z_3=2+2i$.

$|2+2i-2+i|=|3i|=3$

Точка z_3 также лежит на границе, поэтому, подставив точку z_3 в степенной ряд, получим

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2+2i-2+i)^n}{i^n 3^n (n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3i)^n}{(3i)^n(n+1)\ln(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}.$$

Этот ряд расходится. Следовательно, в точке z_3 ряд расходится.

Контрольное задание № 12

Определить область сходимости степенных рядов и исследовать их поведение в данных точках z_1, z_2, z_3.

1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1-i)^n}{2^n(n^2+1)}$; $z_1=3i$; $z_2=0$; $z_3=3+i$.

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{n\cdot i^n}$; $z_1=i$; $z_2=-i$; $z_3=1+i$.

§ 3. Ряды Лорана

1. Определение. Ряд вида $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ называется рядом Лорана, где

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{c_{-n}}{(z-a)^n}$ – главная часть ряда Лорана, а

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n$ – правильная часть ряда Лорана.

2. Область сходимости ряда Лорана.

Ряд Лорана сходится в кольце $r<|z-a|<R$ при $r<R$. Если $r>R$, то ряд Лорана расходится всюду, если $r=0, R\neq 0$, то ряд Лорана сходится в области $0<|z-a|<R$, которая является кругом с выколотой точкой a.

3. Определение области сходимости ряда Лорана.

Для определения области сходимости ряда Лорана необходимо:

1) найти область сходимости правильной части ряда Лорана. Так как правильная часть есть степенной ряд, то областью сходимости будет круг $|z-a|<R$;

2) найти область сходимости главной части ряда Лорана. Для этого составляется ряд из модулей этой части и применяется либо признак Даламбера, либо радикальный признак Коши. Областью сходимости главной части ряда Лорана будут точки, лежащие вне круга $|z-a|>r$;

3) если $r<R$, то существуют общие точки, в которых сходится и правильная часть, и главная часть ряда Лорана. Это и будет кольцо сходимости ряда Лорана $r<|z-a|<R$.

Пример: определить область сходимости данного ряда Лорана

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n^3(z-2+i)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{2^n}.$$

1) Исследуем на сходимость правильную часть ряда Лорана $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(z-2+i)^n}{2^n}$. Для этого составим ряд из модулей и применим радикальный признак Коши

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|z-2+i|^n}{2^n}}=\frac{|z-2+i|}{2}.$$

При $|z-2+i|<2$ ряд сходится. Областью сходимости правильной части ряда Лорана является круг с центром в точке $2-i$ и радиусом 2.

2) Исследуем на сходимость главную часть ряда Лорана $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2^n\cdot n^3(z-2+i)^n}$. Для этого составим ряд из модулей и применим признак Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot n^3\cdot|z-2+i|^n}{2^{n+1}(n+1)^3|z-2+i|^{n+1}}=\frac{1}{2|z-2+i|}.$$

При $|z-2+i|>0,5$ ряд сходится. Главная часть ряда Лорана сходится вне круга радиуса 0,5 с центром в точке $2-i$.

3) Возьмем пересечение областей сходимости правильной и главной частей ряда Лорана, получим кольцо $0,5<|z-2+i|<2$, в котором сходится данный ряд Лорана (рис. 42).

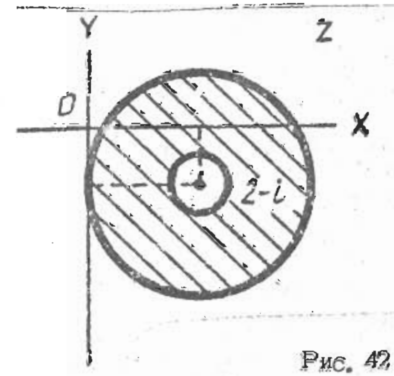

Рис. 42

Контрольное задание № 13

Определить область сходимости следующих рядов Лорана:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(n+1)}{n(z-1-i)^n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(z-1-i)^n}{3^n n\sqrt{n}}$;

2. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}\frac{(z+3i)^n}{n^2+1}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{n\cdot z^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n\cdot 3^n}$.

Задание на дом

Исследовать на сходимость числовые ряды

№ 33. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{(3-4i)^n}$; № 34. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n i^n}{\sqrt{n}}$; № 35. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(1-i\sqrt{3})^n}{n^2\cdot 2^n}$.

Определить области сходимости данных рядов и исследовать их поведение в точках

№ 36. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{4n}\right)^n (z-2i)^n$; $z_1=1+2i$; $z_2=-2+2i$; $z_3=4i$.

№ 37. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+3i)^n}{(\sqrt{7}-3i)^n}$; $z_1=i$; $z_2=1-3i$; $z_3=4-3i$.

№ 38. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(z+1-i)^{2n}}{4^n(n+\ln n)}$; $z_1=0$; $z_2=1+3i$; $z_3=-1+3i$.

Определить область сходимости рядов

№ 39. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(3+4i)^n}{(z-i)^n} + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z-i}{6}\right)^n$.

№ 40. $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{2^n}$.

№ 41. $-\frac{1}{z+2i} + \frac{2}{(z+2i)^2} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(z+2i)^n}{(3i)^n}$.

ЗАНЯТИЕ 6. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана

1. Теорема. Функция $f(z)$, аналитичная в области D для любой точки a из области в круге $|z-a|<r$, целиком лежащем в области D, представляется в виде суммы сходящегося степенного ряда

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

коэффициенты которого вычисляются по формуле

$$c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_r}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}},$$

где $n=0,1,2,\dots$ Ряд называется рядом Тейлора.

2. Теорема. Функция $f(z)$, аналитичная в кольце

$r<|z-a|<R$, представляется в этом кольце рядом Лорана (рис. 43)

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n,$$

где $c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{r'}}\frac{f(z)\,dz}{(z-a)^{n+1}}$;

$C_{r'}=\{z:\ |z-a|=r'\}$ $r<r'<R'$.

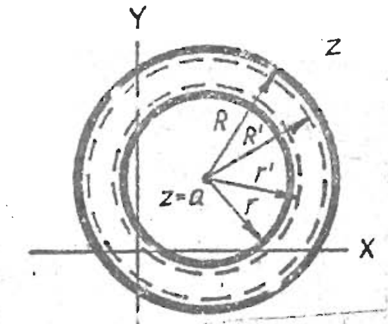

Рис. 43

3. Основные элементарные функции комплексного переменного представляются следующими рядами:

1. $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ при $0\le|z|<\infty$. (27)

2. $\sin z=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ при $0\le|z|<\infty$. (28)

3. $\cos z=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$ при $0\le|z|<\infty$. (29)

4. $\operatorname{sh} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$ при $0\le|z|<\infty$. (30)

5. $\operatorname{ch} z=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ при $0\le|z|<\infty$. (31)

6. $(1+z)^m=\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} z^n$ при $0\le|z|<1$. (32)

7. $\ln(1+z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}$ при $0\le|z|<1$. (33)

8. $\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ при $0\le|z|<1$. (34)

Это бесконечная геометрическая прогрессия с комплексными членами.

4. Определения:

1) Точка z_0 для функции $W=f(z)$ называется особой точкой, если в этой точке нарушается аналитичность функции.

2) Особая точка z_0 для функции $W=f(z)$ называется изолированной особой точкой, если существует некоторая окрестность этой точки, в которой функция аналитична всюду, кроме точки z_0.

5. Правило для разложения функции $f(z)$ в ряд по степеням $(z-a)$.

1) Найдем все изолированные особые точки для данной функции. Это точки, в которых либо функция не существует, либо не существует ее производная.

2) На чертеже отметим полученные особые точки (например z_1, z_2) и точку $z=a$. Так как разложение в ряд берется по степеням $(z-a)$, то точка a должна быть центром круга.

3) Выделим области аналитичности данной функции. Для этого проведем окружности с центром в точке a через все найденные особые точки. Если таких точек две z_1 и z_2, причем $|z_1-a|=R_1$, $|z_2-a|=R_2$ и $R_1<R_2$, то получим три области аналитичности данной функции

1 $\quad |z-a|<R_1$ – круг;

II $\quad R_1<|z-a|<R_2$ – кольцо;

III $\quad R_2<|z-a|<\infty$ – кольцо, одна окружность которого имеет бесконечно большой радиус.

Если точка $z=a$ является точкой аналитичности данной функции, то в области 1 функция раскладывается в ряд Тейлора, а во II и III – в ряды Лорана. Если точка $z=a$ – особая точка для данной функции, то во всех трех областях функция раскладывается в ряды Лорана.

4) Найдем разложения в ряд данной функции в каждой из областей.

Примеры: 1. Функцию $f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}$ разложить в ряд по степеням $(z-1)$.

1) Для нахождения особых точек разложим знаменатель на линейные множители

$$f(z)=\frac{1}{z^2+3z+2}=\frac{1}{(z+1)(z+2)}.$$

Особыми точками будут $z_1=-1$, $z_2=-2$, так как в этих точках не существует функция.

2) Построим на комплексной плоскости точки $z_1=-1$ и $z_2=-2$ и точку $z=a=1$.

3) Проведем две окружности с центром в точке $z=1$ и через особые точки $z_1=-1$ и $z_2=-2$.

$R_1=|1-(-1)|=2$; $R_2=|1-(-2)|=3$.

Получим три области (рис. 44):

I $\quad |z-1|<2$;

II $\quad 2<|z-1|<3$;

III $\quad 3<|z-1|<\infty$.

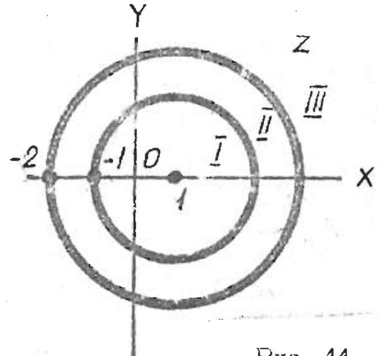

Рис. 44

4) Для разложения данной функции в ряд представим данную функцию в виде суммы простых дробей

$$f(z)=\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}.$$

Каждую дробь разложим в ряд, используя разложение (34) следующим образом:

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{2[1+\frac{z-1}{2}]}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{2}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится в области $\left|-\frac{z-1}{2}\right|<1$ или $|z-1|<2$, т.е. в области 1.

Получим разложение этой дроби в других областях. Для этого в знаменателе вынесем за скобку выражение $z-1$

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{(z-1)+2}=\frac{1}{(z-1)(1+\frac{2}{z-1})}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n 2^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Полученный ряд сходится в области $\left|-\frac{2}{z-1}\right|<1$ или $|z-1|>2$, т.е. в областях II и III.

Аналогично разложим в ряд вторую дробь

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{3(1+\frac{z-1}{3})}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{z-1}{3}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^{n+1}}.$$

Ряд сходится в области $\left|-\frac{z-1}{3}\right|<1$ или $|z-1|<3$, т.е. в областях 1 и II.

Или

$$\frac{1}{z+2}=\frac{1}{(z-1)+3}=\frac{1}{(z-1)(1+\frac{3}{z-1})}=\frac{1}{z-1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{z-1}\right)^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(z-1)^{n+1}}.$$

Ряд сходится в области $\left|-\frac{3}{z-1}\right|<1$ или $|z-1|>3$, т.е. в области III.

Так как

$$f(z)=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2},$$

то найдем разности полученных рядов в соответствующих областях. Получим

в области 1

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{2^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right);$$

в области П

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(z-1)^n}{3^{n+1}};$$

в области Ш

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 2^n}{(z-1)^{n+1}}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\cdot 3^n}{(z-1)^{n+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(z-1)^{n+1}}\left(2^n-3^n\right).$$

В области 1 имеем ряд Тейлора, в областях П и Ш – ряды Лорана.

2. Разложить в ряд по степеням z функцию $f(z)=\frac{\sqrt[3]{8+z^3}}{z}$ (рассматривается та ветвь многозначной функции, которая на вещественной оси на плоскости z принимает вещественное значение).

1) Особыми точками функции являются $z_1=0$, так как в этой точке не существует функция, $z_2=-2$, $z_3=1+i\sqrt{3}$, $z_4=1-i\sqrt{3}$. Точки z_2, z_3, z_4 найдены из уравнения $z^3+8=0$. В этих точках не существует производная.

2) Построим окружность с центром в точке $z=0$ (так как разложение находится по степеням z) и радиусом 2 (так как $|0-(-2)|=2$). На этой окружности будут лежать особые точки z_2, z_3, z_4, так как модуль у всех этих точек одинаков и равен 2.

3) Эта окружность делит всю комплексную плоскость на две области:

область 1. $0<|z|<2$ – круг с выколотым центром (кольцо, у которого внутренняя окружность имеет радиус, равный нулю, а внешняя – 2);

область П $|z|>2$ – кольцо, у которого радиус внешней окружности бесконечен. В полученных кольцах данная функция аналитична и, следовательно, раскладывается в ряд Лорана (рис. 45).

4) Найдем эти разложения, используя формулу (32). Так как эта формула дает разложение функции $(1+z)^m$, то заданную функцию нужно тождественно преобразовать с учетом того, чтобы в записи ее появилась единица. Для этого вынесем из под

корня 8 и извлечем кубический корень из восьми. Возьмем только действительное значение корня, равное 2, соответствующее действительной ветви. Две другие ветви можно получить, если брать соответственно два других корня $-1+i\sqrt{3}$, $-1-i\sqrt{3}$.

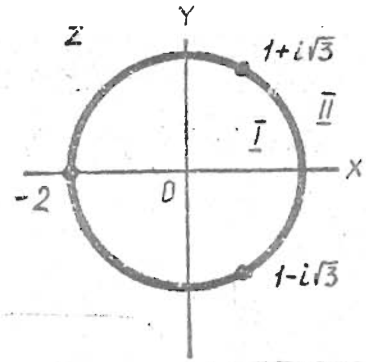

Рис. 45

$$f(z)=\frac{\sqrt[3]{8+z^3}}{z}=\frac{2\sqrt[3]{1+\left(\frac{z}{2}\right)^3}}{z}=\frac{2}{z}\left[1+\left(\frac{z}{2}\right)^3\right]^{\frac{1}{3}}=\frac{2}{z}\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^3+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{z}{2}\right)^6+\dots\right]=$$

$$=\frac{2}{z}+\frac{2}{3}\left(\frac{z}{2}\right)^2+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\dots(3n-4)}{3\cdot6\dots(3n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{3n-1}(-1)^{n+1}.$$

Область сходимости этого ряда $0<\left|\frac{z}{2}\right|<1$ или $0<|z|<2$, т.е. область 1.

Для получения разложения в области П сделаем следующие преобразования:

$$f(z)=\frac{\sqrt[3]{8+z^3}}{z}=\frac{z\sqrt[3]{1+\left(\frac{2}{z}\right)^3}}{z}=\left[1+\left(\frac{2}{z}\right)^3\right]^{1/3}=\left[1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{2!}\left(\frac{2}{z}\right)^2+\dots\right]=$$

$$=1+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{z}\right)^3+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2\cdot5\dots(3n-4)}{3\cdot6\dots(3n)}\left(\frac{2}{z}\right)^{3n}(-1)^{n+1}.$$

Полученный ряд сходится в области $\left|\frac{2}{z}\right|<1$ или $|z|>2$, т.е. в области П.

3. Разложить в ряд по степеням $z+2$ функцию

$$f(z)=\frac{1}{z+2}e^{\frac{z}{z+2}}.$$

1) Данная функция имеет одну особую точку $z=-2$.

2) Центром круга должна быть точка $z=-2$. Следовательно, областью аналитичности данной функции является область $0<|z+2|<\infty$, т.е. вся плоскость с выколотой точкой $z=-2$ (рис. 46).

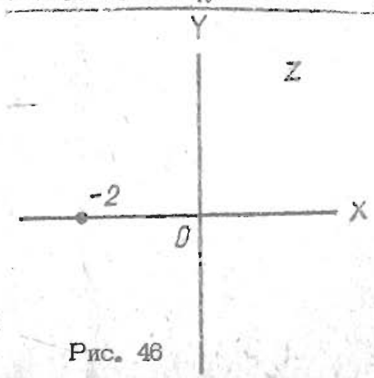

Рис. 46

3) Разложим в ряд , используя разложение (27). Выделим в выражении функции. Получим

$$f(z)=\frac{1}{z+2}\,e^{\frac{z}{z+2}}=\frac{1}{z+2}\,e^{\frac{z+2-2}{z+2}}=\frac{e}{z+2}\,e^{-\frac{2}{z+2}}=\frac{e}{z+2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{z+2}\right)^{n}\frac{1}{n!}=$$

$$=e\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}\cdot 2^{n}}{n!\,(z+2)^{n+1}}.$$

Полученное разложение – единственное.

Контрольное задание № 14

1. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z+1}{z^2+2z+2}$ в ряд по степеням $z+1$.

2. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{2\sin^2 z}{\left(z+\frac{\pi}{4}\right)^3}$ в ряд по степеням $z+\frac{\pi}{4}$.

Задание на дом

№ 42. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{2}{(z^2-4)^3}$ в ряд по степеням $z-2$.

№ 43. Разложить функцию $f(z)=z^3 e^{\frac{1}{z}}$ в ряд по степеням z.

№ 44. Разложить функцию $f(z)=\frac{1}{z}\operatorname{ch}\frac{2}{z}$ в ряд по степеням z.

№ 45. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{1}{z^2+2z-8}$ в ряд по степеням $(z+2)$ в области $1<|z+2|<4$.

№ 46. Разложить функцию $f(z)=\dfrac{z}{z^2+1}$ в ряд по степеням $z-i$ в окрестности точки $z=i$.

ЗАНЯТИЕ 7. Особые точки, классификация. Вычеты, вычисление интегралов

§ 1. Изолированные особые точки функции и их классификация

Изолированные особые точки могут быть трех типов:

1) устранимые особые точки;
2) полюсы;
3) существенно особые точки.

Их тип может быть определен, исходя из поведения данной функции в найденной особой точке, а также из вида ряда Лорана, полученного для данной функции в окрестности найденной особой точки (см.табл.1).

Таблица 1

Классификация изолированных особых точек

Тип точки	Поведение функции в этой точке	Разложение в ряд в окрестности данной особой точки	
		$z=a$ – конечная точка	$z=\infty$ – бесконечно удаленная точка
1. $z=a$ – устранимая особая точка	$\lim\limits_{z\to a} f(z)=C_0\neq\infty$	$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ Разложение в ряд $f(z)$ в окрестности точки a не содержит отрицательных степеней $(z-a)$	$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}+C_0$ Разложение в ряд $f(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки не содержит положительных степеней z
2. $z=a$ – полюс	$\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$	$f(z)=\sum\limits_{n=1}^{k} \frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\sum\limits_{n=0}^{\infty} C_n (z-a)^n$ Конечное число членов с отрицательной степенью $(z-a)$	$f(z)=\sum\limits_{n=0}^{k} C_n z^n+\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{C_{-n}}{z^n}$ Конечное число членов с положительной степенью z
3. $z=a$ – существенно особая точка	$\lim\limits_{z\to a} f(z)$ не существует	$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n (z-a)^n$ Отрицательных степеней $(z-a)$ – бесчисленное множество	$f(z)=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$ Положительных степеней z – бесчисленное множество

§ 2. Порядок нуля функции и порядок полюса

1. Определение. Точка $z=a$ называется нулем функции, если в этой точке функция равна нулю $f(a)=0$.

2. Определение. Точка $z=a$ называется нулем к-го порядка для функции $f(z)$, если функция аналитична в точке $z=a$ и выполнено одно из условий:

1) $f(z)=(z-a)^k f_1(z)$ или

2) $f(a)=0,\ f'(a)=0,\ \dots,\ f^{(k-1)}(a)=0,\ f^{(k)}(a)\neq 0$.

3. Определение. Точка $z=a$ называется полюсом к-го порядка функции $f(z)$, если в разложении в ряд Лорана данной функции в окрестности точки a самый большой отрицательный показатель степени при $(z-a)$ равен по модулю "к"

$$\left(f(z)=\sum_{n=1}^{k}\frac{C_{-n}}{(z-a)^n}+\sum_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n\right).$$

4. Нахождение порядка полюса.

Для нахождения порядка полюса существуют следующие три возможности:

1) Разложить функцию в ряд в окрестности полюса и найти "к" по определению 3.

2) $f(z)$ в точке $z=a$ имеет полюс порядка "к", если функция $\frac{1}{f(z)}$ имеет в этой точке ноль порядка "к".

3) Если $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и m – порядок нуля числителя, n – порядок нуля знаменателя, то возможны следующие случаи:

а) $m<n$, тогда $z=a$ – полюс $f(z)$ и его порядок $n-m$;
б) $m>n$, тогда $z=a$ – ноль $f(z)$ и его порядок $m-n$;
в) $m=n$, тогда $z=a$ – устранимая особая точка.

Примеры: найти особые точки данных функций $f(z)$, определить их тип, для полюса найти его порядок, определить, чем является для данной функции бесконечно удаленная точка.

1. $f(z)=\frac{z^2-1}{z-1}$.

1) Найдем особые точки $z-1=0$; $z_1=1$.

2) Определим тип этой особой точки по поведению функции

$$\lim_{z\to 1} f(z)=\lim_{z\to 1}\frac{\cancel{(z-1)}(z+1)}{\cancel{(z-1)}}=2.$$

Так как предел функции существует и равен конечному числу 2, то точка $z_1=1$ является устранимой особой точкой.

3) Определим, чем для данной функции является бесконечно удаленная точка.

$\lim\limits_{z\to\infty}\frac{z^2-1}{z-1}=\infty$. Следовательно, точка $z=\infty$ есть полюс.

z^2-1 имеет порядок бесконечности 2, $(z-1)$ – 1. Следовательно, $z=\infty$ – полюс порядка 2–1 = 1, т.е. простой полюс.

2. $f(z)=\frac{1-\cos z}{z^2}$

1) Найдем особые точки $z=0$.

2) Определим их тип

1-й способ: с помощью определения порядка нуля в числителе и в знаменателе.

Для определения порядка нуля в числителе подставим в числитель и в его производные точку $z=0$. Получим $1-\cos 0=0$, $(1-\cos z)'=\sin z$, $\sin 0=0$, $(1-\cos z)''=(\sin z)'=\cos z$, $\cos 0=1\neq 0$.

Так как вторая производная в точке $z=0$ отлична от нуля, то $z=0$ является для числителя нулем 2-го порядка. Знаменатель в точке $z=0$ – также ноль 2-го порядка. Следовательно, точка $z=0$ – устранимая особая точка.

2-й способ: с помощью разложения функции в ряд.

Разложим данную функцию в ряд в окрестности точки $z=0$.

Так как других особых точек функция не имеет, то разложение в ряд у нее единственное в области $0<|z|<\infty$, т.е. на всей плоскости с выколотой точкой $z=0$

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{z^2}\left(1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\dots\right)=\frac{1}{2!}-\frac{z^2}{4!}+\frac{z^4}{6!}-\dots$$

В этом разложении нет отрицательных степеней z. Следовательно, $z=0$ – устранимая особая точка.

3) Определим, чем является для данной функции бесконечно удаленная точка. Для этого рассмотрим уже полученное разложение в ряд данной функции.

Так как разложение в ряд единственное, оно является разложением данной функции и в окрестности точки $z=0$ и в окрестности бесконечно удаленной точки. Так как в этом разложении бесчисленное множество положительных степеней z, то бесконечно удаленная точка является существенно особой.

3. $f(z)=3^{\frac{z}{z+1}}$.

1) Найдем особые точки $z=-1$.

2) Выясним тип особой точки.

Рассмотрим предел данной функции при $z\to -1$.

Так как предел, если он существует, должен быть одинаковым по любому направлению, то выберем за рассматриваемые направления подход к данной точке по действительной оси справа и слева, т.е. $y=0$, $x\to-1+0$ и $y=0$, $x\to-1-0$.

$$\lim_{x\to-1+0} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{-\frac{1}{+0}} = e^{-\infty} = 0;$$

$$\lim_{x\to-1-0} e^{\frac{x}{x+1}} = e^{-\frac{1}{-0}} = e^{+\infty} = \infty.$$

Так как значения пределов различны, то предел при $z\to\infty$ не существует. Следовательно, данная точка является существенно особой.

3) Выясним, чем является бесконечно удаленная точка для данной функции. Найдем предел функции при $z\to\infty$

$$\lim_{z\to\infty} e^{\frac{z}{z+1}} = e \neq \infty$$

Так как предел существует и он конечен, то $z=\infty$ – устранимая особая точка.

Контрольное задание № 15

Найти особые точки данных функций, определить их тип, для полюса определить его порядок, определить, чем для данной функции является бесконечно удаленная точка.

1. $f(z)=\dfrac{z-1}{z^2-5z+4}$ 2. $f(z)=\dfrac{\operatorname{sh}(z-1)}{(z-1)^3}$. 3. $f(z)=z^3\operatorname{ch}\dfrac{1}{z}$.

§ 3. Вычеты функции

1. Определение. Вычетом данной функции $f(z)$ в данной точке $z=a$ называется произведение постоянного множителя $\dfrac{1}{2\pi i}$ на интеграл от данной функции по замкнутому контуру, однократно обходящему данную точку, если функция аналитична всюду внутри контура за исключением быть может точки a.

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c f(z)\,dz.$$

2. Теорема. Вычет данной функции $f(z)$ в данной точке $z=a$ равен коэффициенту C_{-1} при $\dfrac{1}{z-a}$ в разложении $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z=a$ $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z) = C_{-1}$.

Таблица 2

Формулы для вычисления вычета в различных точках

Тип особой точки	Формула для вычисления вычета
1. Устранимая особая точка	$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0$
2. Полюс k-го порядка	$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\dfrac{1}{(k-1)!}\lim\limits_{z\to a}\dfrac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-a)^k\right]$
3. Полюс 1-го порядка (простой полюс)	1-й способ $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\lim\limits_{z\to a}\left[f(z)(z-a)\right]$, 2-й способ $\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\dfrac{\varphi(a)}{\psi'(a)}$, если $f(z)=\dfrac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ и $\varphi(a)\neq 0$
4. Существенно особая точка	$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=C_{-1}$ Для отыскания вычета обязательно разложение функции в ряд в окрестности этой точки

3. Вычет в бесконечно удаленной точке равен сумме вычетов во всех конечных особых точках, взятой со знаком "–"

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=a_k} f(z)$$

Примеры: вычислить вычеты данной функции $f(z)$ во всех ее особых точках, найти вычет в бесконечно удаленной точке.

1. $f(z)=\dfrac{\cos z}{(z-i)^3}$.

Точка $z=i$ – полюс 3-го порядка, вычет вычисляем по формуле 2 из табл. 2 при $k=3$.

$$\operatorname*{Res}_{z=i} f(z) = \frac{1}{2!} \lim_{z\to i} \frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{\cos z}{(z-i)^3}\cdot(z-i)^3\right] = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}\frac{d^2}{dz^2}(\cos z) = \frac{1}{2}\lim_{z\to i}(-\cos z) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cos i = -\frac{1}{2}\operatorname{ch} 1\,; \qquad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = \frac{1}{2}\operatorname{ch} 1\,.$$

2. $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-z-6} = \dfrac{z+2}{(z+2)(z-3)}$.

Точка $z=-2$ – устранимая особая точка, вычет в ней равен нулю. Точка $z=3$ – полюс 1-го порядка. Вычет вычисляем вторым способом для полюса 1-го порядка из табл. 2

$$\operatorname*{Res}_{z=3} f(z) = \left[\frac{z+2}{(z^2-z-6)'}\right]_{z=3} = \left[\frac{z+2}{2z-1}\right]_{z=3} = \frac{5}{5} = 1\,; \quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -1\,.$$

3. $f(z) = z^4 \sin\dfrac{1}{z}$.

Особая точка $z=0$. Других особых точек нет, поэтому разложение в ряд будет единственным и в окрестности точки $z=0$ и в окрестности $z=\infty$. Получим это разложение

$$f(z) = z^4\sin\frac{1}{z} = z^4\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z^{-(2n+1)}}{(2n+1)!} = z^4\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z^3\cdot 3!} + \frac{1}{z^5 5!} - \frac{1}{z^7 7!} + \ldots\right) = z^3 - \frac{z}{3!} + \frac{1}{z\,5!} - \frac{1}{z^3 7!} + \ldots$$

Отрицательных степеней z в этом разложении бесчисленное множество, следовательно, точка $z=0$ – существенно особая точка. Вычет функции в этой точке равен коэффициенту при $\frac{1}{z}$

$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) = \dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$. Положительных степеней в этом разложении конечное число, следовательно, бесконечно удаленная точка будет полюсом. Так как высшая положительная степень равна 3, то $z=\infty$ – полюс 3-го порядка

$$\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z) = -\frac{1}{120}\,.$$

Контрольное задание № 16

Вычислить вычеты данной функции $f(z)$ во всех ее особых точках, найти вычет в бесконечно удаленной точке

1. $f(z) = \dfrac{2z+5}{z^4-4z^2+4}$; 2. $f(z) = \dfrac{\sin^2 z}{z^3(z-\pi)^2}$; 3. $f(z) = z^3 e^{\frac{1}{z}}$.

§ 4. Вычисление интегралов с помощью вычетов

1. Теорема. Если функция $f(z)$ имеет внутри замкнутого контура конечное число изолированных особых точек, а в

остальных точках она аналитична, то

$$\oint_{\mathcal{L}} f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{a_k} f(z)\,,$$

где a_k – особые точки подынтегральной функции, лежащие внутри контура интегрирования.

Примеры: вычислить интегралы

1. $\oint_{\mathcal{L}}\dfrac{dz}{z^5+4z^3}$; $\mathcal{L}$ – окружность $|z-2i|=3$.

Найдем особые точки подынтегральной функции и определим их тип

$z=0$ – полюс 3-го порядка;
$z=2i$ – полюс 1-го порядка;
$z=-2i$ – полюс 1-го порядка.

Внутри контура лежат две точки $z=0$ и $z=2i$ (рис. 47). Поэтому

$$\oint_{\mathcal{L}}\frac{dz}{z^5+4z^3} = 2\pi i\left[\operatorname*{Res}_{z=0} f(z) + \operatorname*{Res}_{z=2i} f(z)\right].$$

Найдем вычет функции в точке $z=0$

$$\operatorname*{Res}_{z=0}\frac{1}{z^5+4z^3} = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\frac{1}{z^3(z^2+4)}\cdot z^3 = \frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{2(3z^2-4)}{(z^2+4)^3} = -\frac{1}{16}\,.$$

Вычет функции в точке $z=2i$ равен

$$\operatorname*{Res}_{z=2i} f(z) = \left.\frac{1}{(z^5+4z^3)'}\right|_{z=2i} = \left.\frac{1}{5z^4+12z^2}\right|_{z=2i} = \frac{1}{5\cdot 16-12\cdot 4} = \frac{1}{32}\,.$$

Таким образом, $\oint_{\mathcal{L}}\dfrac{dz}{z^5+4z^3} = 2\pi i\left(-\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{32}\right) = -\dfrac{\pi i}{16}$.

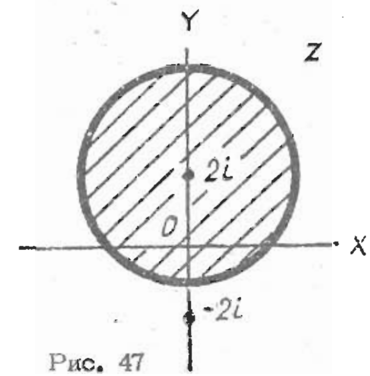

Рис. 47

Контрольное задание № 17

Вычислить следующие интегралы:

1. $\oint\limits_L \frac{e^z dz}{(z-1)^2 z}$; L : $|z+2| = \frac{5}{2}$.

2. $\oint\limits_L \frac{z dz}{\cos z}$; L – прямоугольник с вершинами в точках $z_1=-i$, $z_2=2-i$, $z_3=2+i$, $z_4=i$.

3. $\oint\limits_L \frac{ch\, 2z\, dz}{z^3(z+2)(z-1)}$; L : $|z+1| = \frac{3}{2}$.

Задание на дом

Найти особые точки данных функций, определить их тип, найти вычеты в этих особых точках, выяснить, чем для данной функции является бесконечно удаленная точка и найти вычет в ней.

№ 47. $f(z) = \frac{1}{z^3(z^2+4)^2}$.

№ 48. $f(z) = \frac{1}{\sin z - 1}$.

№ 49. $f(z) = \frac{\cos z}{(z+\frac{\pi}{2})(z^2-4)^2}$.

№ 50. $f(z) = \frac{2z^3+1}{z^3(z-2)^2}$.

№ 51. $f(z) = \frac{\sin z}{z^2(z-\pi)}$.

№ 52. $f(z) = z^5\, ch \frac{1}{z}$.

Вычислить следующие интегралы с помощью вычетов:

№ 53. $\oint\limits_L \frac{z dz}{z^4+1}$; L – эллипс $\frac{(x-1)^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$.

№ 54. $\oint\limits_L \frac{dz}{(z+2)^2(z-3)^3}$; L : $|z+2| = 1$.

№ 55. $\oint\limits_L \frac{e^{zi} dz}{\sin 2z}$ L – ромб с вершинами $z=2, z=i, z=-2, z=-i$.

№ 56. $\oint\limits_L ctg\, 3z\, dz$; L : $|z-\frac{\pi}{2}| = 1$.

Ответы к контрольным заданиям

Контрольное задание № 1

1. $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{3}{4}\pi\right)\right]$; $z=\sqrt{2}\, e^{-i\frac{3}{4}\pi}$. (рис. 48)

2. $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$; $z=2e^{-i\frac{\pi}{4}}$. (рис. 49)

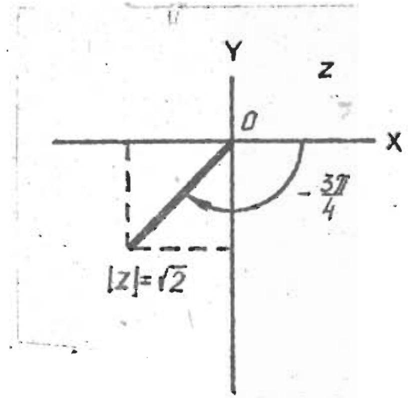

Рис. 48

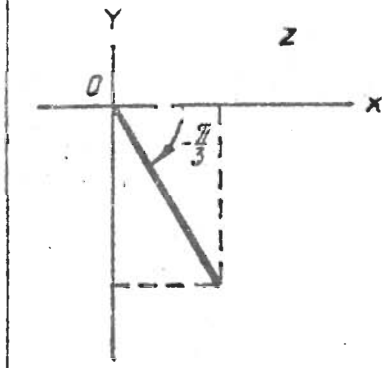

Рис. 49

Контрольное задание № 2

1. $1+3\sqrt{3}i$ 2. $-3-i\sqrt{3}$ 3. -8 4. $\frac{1}{4}+i\frac{\sqrt{3}}{4}$ 5. 8

Контрольное задание № 3

1. $3\sqrt{3}+3i$ 2. $-1+i\sqrt{3}$ 3. $-16\sqrt{3}-16i$ 4. $2^9=512$

5. $z_1=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $z_2=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}$, $z_3=-i$. (рис. 50)

6. $z_1=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{24}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{24}\right)\right]$; $z_2=2\left[\cos\frac{11}{24}\pi+i\sin\frac{11}{24}\pi\right]$;
$z_3=2\left[\cos\frac{23}{24}\pi+i\sin\frac{23}{24}\pi\right]$; $z_4=2\left[\cos\frac{35}{24}\pi+i\sin\frac{35}{24}\pi\right]$.

Контрольное задание № 4

1. (рис. 51). 2. (рис. 52). 3. (рис. 53).

Контрольное задание № 5

1. $W(0)=1$; $W(+i)=+3$; $W(-1)=1+2i$ (рис. 54).

2. $W(0)=\infty$; $W(4)=\frac{1}{4}$; $W(4+2i)=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}i$; $W(2i)=-\frac{1}{2}i$;

OA переходит в O'A'; $x=4$ переходит в окружность $(u-\frac{1}{8})^2+v^2=\frac{1}{64}$; $y=2$ – в окружность $u^2+(v+\frac{1}{4})^2=\frac{1}{16}$ (рис. 55).

3. $W(1)=1$; $W(2)=4$; $W(2+i)=3+4i$; $W(1+i)=2i$;

AB переходит в A_1B_2; $x=2$ – в параболу $v^2=-16(u-4)$; $y=1$ – в параболу $v^2=4(u+1)$; $x=1$ – в параболу $v^2=-4(u-1)$ (рис.56).

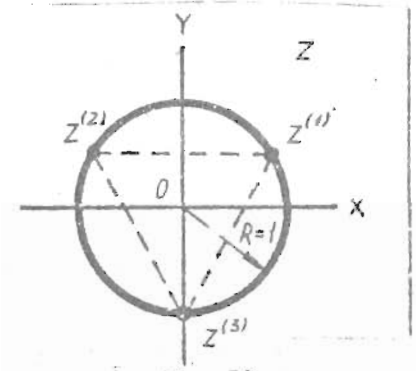

Рис. 50

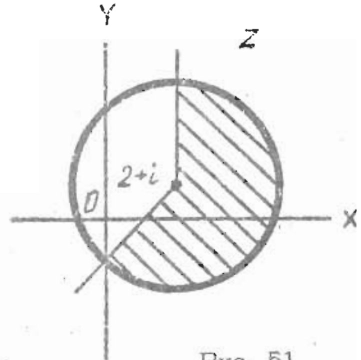

Рис. 51

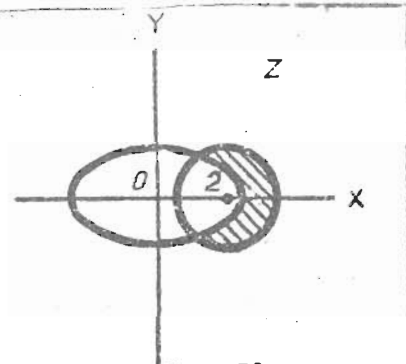

Рис. 52

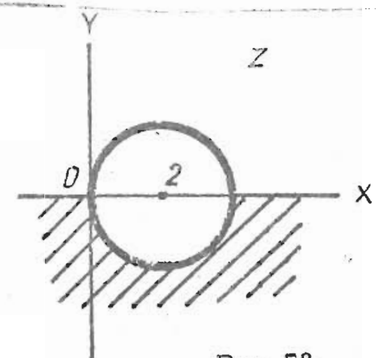

Рис. 53

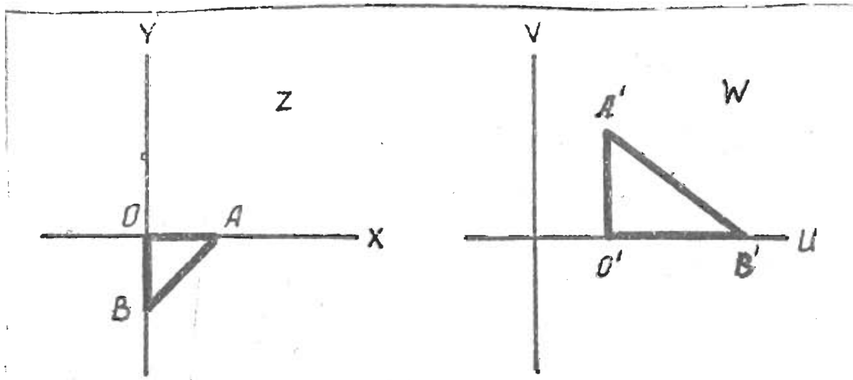

Рис. 54

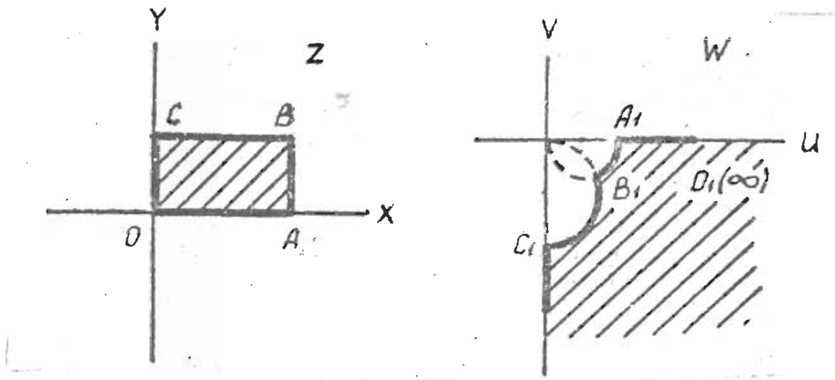

Рис. 55

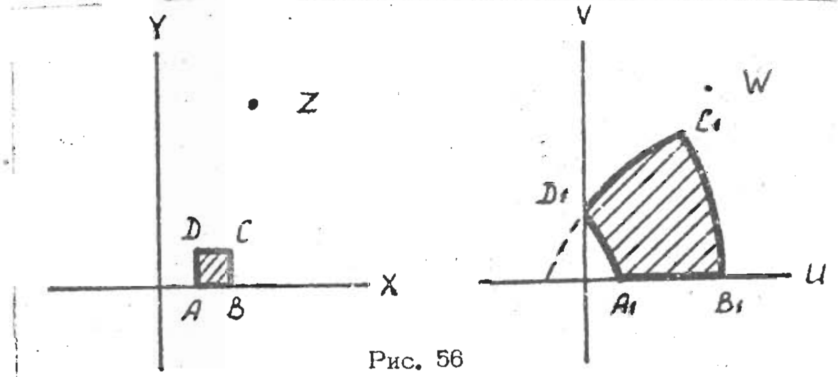

Рис. 56

Контрольное задание № 6

1. 1. 2. $i\frac{3}{4}$. 3. $\frac{1}{2}\ln 2 + i\frac{\pi}{4}$. 4. $\frac{\sqrt{2}}{6}(4+5i)$.

Контрольное задание № 7

1. Аналитична всюду. 2. Аналитична всюду, кроме $z = 0$.
3. Не аналитична ни в одной точке.

Контрольное задание № 8

1. $\ln z + C$. 2. $w = \cos z + C$.

Контрольное задание № 9

1. 2, $\frac{\pi}{3}$. 2. $\frac{1}{3}$, 67,5°. 3. В области $|z-1+i|>1$ – сжатие; в области $0<|z-1+i|<1$ – растяжение.

Контрольное задание № 10

1. $W=-\frac{1}{2}z+1.$ 2. $2i\frac{z-i}{z+i}=W.$ 3. $W=\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2.$

Контрольное задание № 11

1. Сходится абсолютно. 2. Сходится условно. 3. Расходится.

Контрольное задание № 12

1. Область сходимости $|z-(1+i)|\le 2$ в z_1 расходится, в z_2, z_3 сходится абсолютно.
2. Область сходимости $|z|<1$ в z_2 сходится условно, в z_1, z_3 расходится.

Контрольное задание № 13

1. $2<|z-1\cdot i|\le 3$ 2. $|z+3i|=1$ 3. Расходится всюду.

Контрольное задание № 14

1. $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z+1)^{2n+1}$ при $|z+1|<1;$

$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{(z+1)^{2n+1}}$ при $|z+1|>1;$

2. $f(z)-\frac{1}{(z+\frac{\pi}{4})^3}-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{2n+1}(z+\frac{\pi}{4})^{2n-2}(-1)^n}{(2n+1)!}$ при $0<|z+\frac{\pi}{4}|<\infty.$

Контрольное задание № 15

1. $z_1=1$ – устранимая особая точка; $z_2=4$ – полюс 1-го порядка; $z=\infty$ – устранимая особая точка.
2. $z=1$ – полюс 2-го порядка; $z=\infty$ – существенно особая точка.
3. $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – полюс 3-го порядка.

Контрольное задание № 16

1. $z=\sqrt{2}$ и $z=-\sqrt{2}$ – полюсы 2-го порядка; $z=\infty$ – устранимая особая точка. $\operatorname*{Res}_{z=\pm\sqrt{2}} f(z)=\mp\frac{5\sqrt{2}}{6}.$
2. $z=0$ – полюс 1-го порядка; $z=\pi$ – устранимая особая точка; $z=\infty$ – существенно особая точка

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{\pi^2};\quad \operatorname*{Res}_{z=\pi} f(z)=0;\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{1}{\pi^2}.$$

3. $z=0$ – существенно особая точка; $z=\infty$ – полюс 2-го порядка;

$$\operatorname*{Res}_{z=0} f(z)=\frac{1}{4!};\quad \operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\frac{1}{4!}.$$

Контрольное задание № 17

1. $2\pi i$ 2. $-\pi^2 i.$ 3. $-\frac{\pi i}{6}(3+\operatorname{ch}4).$

Оглавление

Введение 3
Занятие 1. Комплексные числа, формы их задания, геометрическое изображение. Действия над комплексными числами 4
§ 1. Комплексные числа, формы их задания, геометрическое изображение 4
Контрольное задание № 1 6
§ 2. Действия над комплексными числами, заданными в алгебраической форме 6
Контрольное задание № 2 8
§ 3. Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической и показательной формах 8
Контрольное задание № 3 11
Занятие 2. Геометрия на комплексной плоскости. Функция комплексного переменного, ее геометрический смысл 11
§ 1. Геометрия на комплексной плоскости 11
Контрольное задание № 4 15
§ 2. Функция комплексного переменного, ее геометрический смысл 15
Контрольное задание № 5 21
Занятие 3. Элементарные функции комплексного переменного, их свойства, вычисление значения функции в точке. Аналитические функции, производная, отыскание аналитической функции по ее действительной или мнимой части 21
§ 1. Основные элементарные функции. Выделение действительной и мнимой частей. Вычисление функции в заданной точке 21
Контрольное задание № 6 23
§ 2. Аналитичность функции в области 24
Контрольное задание № 7 25
§ 3. Производная функции комплексного переменного. Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части 26
Контрольное задание № 8 27
Занятие 4. Геометрический смысл модуля и аргумента производной. Конформные отображения. Отображения, осуществляемые элементарными функциями 28
§ 1. Геометрический смысл модуля и аргумента производной 28
Контрольное задание № 9 29
§ 2. Конформные отображения 30

§ 3. Отображения, осуществляемые основными элементарными функциями 31
Контрольное задание № 10 38
Занятие 5. Ряды в комплексной области 39
§ 1. Числовые ряды с комплексными членами 39
Контрольное задание № 11 41
§ 2. Степенные ряды с комплексными членами 41
Контрольное задание № 12 46
§ 3. Ряды Лорана 46
Контрольное задание № 13 47
Занятие 6. Разложение функций в ряды Тейлора и Лорана 48
Контрольное задание № 14 54
Занятие 7. Особые точки, классификация. Вычеты, вычисление интегралов 54
§ 1. Изолированные особые точки функции и их классификация 54
§ 2. Порядок нуля функции и порядок полюса 56
Контрольное задание № 15 58
§ 3. Вычеты функции 58
Контрольное задание № 16 60
§ 4. Вычисление интегралов с помощью вычетов 60
Контрольное задание № 17 62
Ответы к контрольным заданиям 62