МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Курс лекций

«Теория вероятностей и математическая статистика»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

имени Н.Э. БАУМАНА

Курс лекций

«Теория вероятностей и математическая статистика»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

УДК 681.3.06(075.8)

ББК 32.973-018

И201

Курс лекций «Теория вероятностей и математическая статистика» / Коллектив авторов – М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 52 с.: ил.

В курсе лекций рассмотрены основные этапы курса «Теория вероятностей и математическая статистика».

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

АННОТАЦИЯ

В курсе лекций рассмотрены основные темы курса «Теория вероятностей и математическая статистика» такие как: определение вероятности событий, поля вероятностей , математическая статистика и др.

ANNOTATION

The course of lectures addressed the main themes of the course "Fundamentals of Electrical Engineering," such as how to calculate the principal electric circuits, namely the nominal electronic radio components, the magnitude of the current and the voltage on each of the circuit elements, the laws of the transients in the supply voltage in the circuit course ends with a consideration of the principles of electronic mechanical engine.

Теория вероятностей.

Основные определения и понятия

Случайное событие – событие, котор. в результате опыта происходит по-разному. (стрельба по цели).

Элементарный исход – ∀ простейший исход опыта.

Совокупн. элемент. исходов образует пр-во элементарн. событий.

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}.$$

Замечание: число элемент. исходов может быть ∞-но

обознач. событий: $A, B \dots$

Событие A – достоверное, если оно всегда происходит. ~~Иначе – не~~

Событие $\bar{A}$ – событие, заключающееся в ненаступлении события A, – противоположное A.

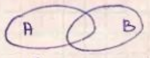
События $A_1, A_2, \dots, A_n$ – равновероятные, если нет объективных причин считать, что одно из них происходит чаще других („орёл – решка").

События A и B – несовместные, если наступление A исключает B и наоборот.

~~Несовместное событие~~

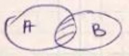
Действия над событиями

1. $A+B$ или $(A \cup B)$ – сложение

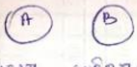


или A, или B, или одновременно.

2. AB $(A \cap B)$ – произведение – событие, заключающ. в наступлении как A, так и B.

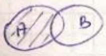


Если A и B – несовместные, то $A \cap B = \varnothing$ – невозможное событие.



3. Разность событий – событие, заключающееся

$A - B$ $(A \setminus B)$



в наступлении A, но B – не происходит

Основные определения вероятностей.

1. Классическая: ограничено тем, что число опытов конечно.

N – число испытаний;

A – событие.

M – число испытаний, благоприятств. наступлению события A.

$P(A) = \frac{M}{N}$ – вероятность.

Из определения следует, что:

1. $0 \le P(A) \le 1$;

$P(\varnothing) = 0$ – вероятн. невозможного события

$P(A) = 1$ – вероятность достоверного события

2. если A и B – несовместны, то вероятность $A+B$:

$P(A+B) = P(A) + P(B)$.

∇ Пусть M_A, M_B – число испыт., благоприятств. наступл. события A и B

$$P(A+B) = \frac{M_A + M_B}{N} = \frac{M_A}{N} + \frac{M_B}{N} = P(A) + P(B).$$

Δ

Сочетания, размещения, перестановки.

есть n – эл-тов. Какими способами из n можем выбрать m эл-тов?

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{m!}$$

число сочетаний.

Число размещений:

$$A_n^m = n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)$$

Число перестановок: $n!$; частный случай, когда $n = m$; $0! = 1$.

Примеры на класс. определение

1. 3 ящика

20	15	10
конден. индукт.	конден.	резист.

Произвольн. образом выбрали 3 детали. Какова вероятность выбора различных деталей

$P(A) = \frac{M}{N}$,

$M = 1$, $N = 20 \cdot 15 \cdot 10$ $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{3000}$.

12	8
б. ш.	ч. ш.

выбираем 2 шара. Какова вероятность выбора

1) 2 б. ш.

2) 2 разн. шара?

1) $N = C_{20}^2$ – число сочетаний

$$N = \frac{20!}{2!\,18!} = \frac{20\cdot 19}{2} = 190$$

$M_{12}^2 = \frac{12\cdot 11}{2} = 66$.

2) $M = C_{12}^1 C_8^1 = 96$.

$P(A) = \frac{96}{190}$.

Недостаток: число испытаний конечно.

2. Геометрическое.

Событие – подмножество из R^1 (плоск.), R^2 (пл-ть), R^3 (пр-во).

Мера мн-ва – длина отрезка из R^1, или S из R^2, или V из R^3. $(\mu(A))$

$\mu(\Omega)$ – мера пр-ва элемент. исхода.

Определение: $P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)}$

Пример: встреча м/у N^o 7 и 8 вечера.

м. ч. ждёт 30 мин.

д. ждёт 15 мин.

Какова вероятность того, что они встретятся

x – момент прихода м. ч.

y – " – " – д.

$\mu(\Omega) = 3600$ (S квадрата)

$$\begin{cases} y - x \leq 30 \\ x - y \leq 15 \end{cases}$$

$$P(A) = \frac{3600 - S_1 - S_2}{3600} = \frac{3600 - \frac{1}{2}900 - 45 \cdot 45}{3600} =$$

$$= 0{,}59.$$

2) Палка произв. длины ломают на 3 части. Какова вероятность, что из 3х частей м/о сложить Δ?

3. Аксиоматическое.

Вероятность – число, удовлетворяющее аксиомам:

1. $P(\varnothing) = 0$.
2. $P(\Omega) = 1$
3. если $A_1, \dots, A_n$ попарно несовместны, т.е.

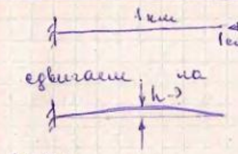
   $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$,

   то вероятность суммы:

   $$P(A_1 + A_2 + \dots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n).$$

Теорема (св-ва вероятностей, котор. определены аксиоматически)

Задача про рельсы;
длина рельса 1 км; упругий



один конец закреплён

сдвигаем на 1 см.

на сколько приподнялся?

$$\int_0^{1км-1см} \dots$$

Основные теоремы теории вероятностей.

2 кубика:

$$P\{i+j=10\} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P\{i+j=7\} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Сумма и произведение событий

Сумма $(A+B)$ событий A и B – событие, состоящее из в выполнении события A либо B, либо обоих сразу.

Прим. 1) 2 выстрела
A_i – попадание в i-ом выстреле.

$A_1 + A_2$ – попадание по мишени,

2) A – конспектирует л.
B – завтракает

$(A+B)$ – студент присутствует

Сумма нескольких соб. – событие, состоящее в появлении хотя бы одного из событий $A_1 + A_2 + \dots + A_n$.

Прим.
3) серии пенальти:
A_i – забито i голов; $i = 0, 1, \dots 5$

событие B – команда забила не более 3х голов: $B = A_0 + A_1 + A_2 + A_3$.

Произведение событий A на B – событие, заключающееся в одновременном выполнении события A и B.

Прим.
4) 2 удара по воротам.
A_1 – во время 1ого уд.
A_2 – " – " – во 2ом удара.

$A_1 \cdot A_2$ – забили 2 гола.

5) A – красн. авто. проезжает.
B – „Жигули".

AB – красные „Жигули".

Произведение нескольких событий $A_1, \dots A_n$ – событие, состоящее в одновременном выполнении всех событий.

Прим. 6) A_i – забитие гола.
$A_1 A_2 \dots A_n$ – каждый удар закончился голами.

Комбинации событий.

пр. 7) 3 выстрела.
A_i – попадание в мишень на i-ом выстреле
B – в мишени 2 попадания.

$$B = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3.$$

C – не более 1ого попадания

$$C = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3} + A_1 \overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2} A_3$$

$\overline{\square}$ – событие $\square$ не произошло.

Следствие из определ. Σ и произведения событий:

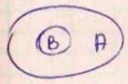
1) $A + A = A$.

(A) на диаграмме – соотв. объединению мн-в.
$A \cup A = A$. (фактически одно и то же)

2) $AA = A$.
$(A \cap A = A)$

3) пусть B влечёт за собой событие A
$B \Rightarrow A$ (B – частный случай A)

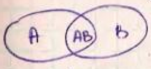
A - студент сдал экзамен
B - на 5-ку



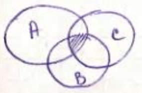
$B \subset A$

$A+B=A$
$AB=B$.

Общий случай.



$A+B$



Совместные и несовместные события

Несовместные - события, кот. не могут произойти одновременно,
Совместные - могут произойти одновреме.

Прим 8) A - зач.
B - незачёт. - несовместные

9) A - забить 5 гола
B - 4 гола. } несовм.

3) A - 3 гола (из 5 пен.)
B - ≥ 2 гола } совместные.

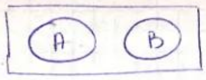
4) A - сдал,
B - сдал на 5.

5)

Теорема сложения вероятностей

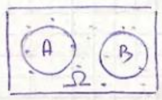
Th 1: Вероятность Σ несовместных событий $= \Sigma$-ме вероятностей:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$



$A \cap B = \varnothing$

⊤ для схемы рассмотрение равных случаев.



нет ни одного события $\in$, одновременно и A и B.

$P(A) = \frac{m(A)}{N} \frac{M_A}{N}$; $P(B) = \frac{M_B}{N}$;

$P(A+B) = \frac{M_A+M_B}{N} = \frac{M_A}{N} + \frac{M_B}{N} = P(A)+P(B)$

несовместность

Th 2 (обобщение): пусть $A_1, \dots A_n$ - (мн-ва не диагр. попарно не пересек) несовместны, тогда

$$P(A_1+A_2+\dots+A_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

⊤ док-во по индукции по числу событий N.

(док-во дома)

События $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют полную группу событий, если в ходе опыта должно произойти хотя бы одно из них (ПГС)

1) A_i; $i = 2,3,4,5$.
A_i - оценка на экзамене.

2) A_i, $i=0,1,\dots,5$ - кол-во голов в серии пенальти.

Следствие из Th сложения:

1°. Пусть $\{A_i\}$ - ПГС нс => (события несовместны)
$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

⊤ Доказательство.

$\sum_{i=1}^{n} A_i$ - достоверное, т.е.
$P(\sum_{i=1}^{n} A_i) \underset{\text{по th 2}}{=} \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = 1$.

Противоположные - 2 несовместных события, образующие ПГС

Пр. 1) A - попадание
$A, \bar{A}$ - несовместные, $A+\bar{A}=\Omega$

2) орёл - решка
A $\bar{A}$.

3) A - исправная деталь
$\bar{A}$ - поломка

4) A - зачёт
$\bar{A}$ - незачёт.

Утверждение:

1) $P(A)+P(\bar{A})=1$
Σ-ма вероятностей противополож. событий $= 1$.

⊤ следствие из следствия 1° th 2.

гипузская лотерея

всего n - номеров, $n=49$
m - выигрышных, $m=6$
k - выбираем номеров
A: l - выигрышных.

49

Вероятность, с которой это происходит.

$N = C_n^k$
$M(A) = C_m^l \cdot C_{n-m}^{k-l}$
$$P(A) = \frac{M(A)}{N} = \frac{C_m^l \, C_{n-m}^{k-l}}{C_n^k}$$

$\ell = 3$: $P(A) = \dfrac{C_6^3\, C_{43}^3}{C_{49}^6} = \dfrac{6\cdot5\cdot4\cdot43\cdot42\cdot41\ \cancel{123456}}{1\cdot2\cdot3\cdot1\cdot2\cdot3\cdot49\cdot48\cdot\ldots\cdot44} =$

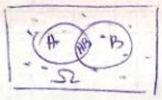
$$\left[C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot\ldots\cdot k}\right]$$

$$= \frac{43\cdot41\cdot5}{47\cdot23\cdot11\cdot7\cdot3\cdot2} \approx \frac{41\cdot5\cdot4^2}{47\cdot23\cdot7\cdot3\cdot7} \approx \frac{5\cdot2\cdot2}{47\cdot23} \approx \frac{1}{50} \approx 2\%$$

По th о сложении; найти вероятность выиграть хоть что-нибудь;
ничего;
выиграть > 3х номеров.

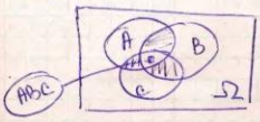
Th: Если события A и B совместны, то
$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB)$. (1)

Д (нестрогое)



$$P(A+B) = \underbrace{\frac{M_A}{N}}_{P(A)} + \underbrace{\frac{M_B}{N}}_{P(B)} - \underbrace{\frac{M_{AB}}{N}}_{P(AB)}$$

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$- P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC) \quad (2)$$



лекция 2

$$P\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i,j=1}^n P(A_i A_j) + \ldots +$$
$$+ (-1)^n P(A_1 A_2 \ldots A_n). \quad (3)$$

Имеет место двойственность: формулы (1), (2), (3) сохраняют свой вид при ~~формальной~~ замене сложения и умножения друг другом (дома, получить двойственные формулы и убедиться в их справедливости)

$P(AB) = P(A) + P(B) - P(A+B)$.

Th (умножения).

B - зависимое от A - если $P(B)$ изменяется от того, произошло событие A или нет.

События A и B - независимые, если $P(B)$ не зависит от наступления A.

Прим: 1) футболист бьёт пенальти.

2) $\boxed{\begin{matrix}3б.\\2ч.\end{matrix}}$

A - белый: 1ый шар
B - 2ой шар белый
$P(A) = \frac{3}{5}$; $P(B|A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$;
если $P(B|\bar{A}) = \frac{3}{4}$.

лекция 2-3

вынимаем шары с возвращением.
$P(A) = \frac{3}{5}$;
$P(B) = P(A) = \frac{3}{5}$.

P

2 студента берут билет.
оба подготовили только 5 одинаковых билетов.
Кому лучше идти?

Условная вероятность. Теорема об умнож. вероятностей.

Условная вероятность наступления A, при условии, что наступило B - отношение вероятностей.

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

Св-ва:

1°. Условие нормируемости

$\Omega B = B$

пр-во элемент. событий

$$P(\Omega|B) = \frac{P(\Omega B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1.$$

2°. $A_1, \ldots, A_n$ - попарно несовместны, т.е.

$A_i A_j = \varnothing$, $i \neq j$

лекция 3

$\Omega(A_1 + \ldots + A_n) = \Omega A_1 + \ldots + \Omega A_n$.

$P(\Omega A_1 + \ldots + \Omega A_n) = P(\Omega A_1) + P(\Omega A_2) + \ldots +$
$+ P(\Omega A_n) = P$ [illegible]

Теорема об умножении вероятностей.

Пусть $A = A_1 A_2 \ldots A_n$, тогда имеет место формула:

$$P(A) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\,P(A_3|A_1A_2)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1})$$

Д $P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-1}) =$ - по определению условной вероятн.
$$= \frac{P(A)}{P(A_1A_2\ldots A_{n-1})}$$

$$P(A) = P(A_1A_2\ldots A_{n-1})\,P(A_n|A_1A_2\ldots A_n)$$

аналогично: $P(A_1A_2\ldots A_{n-1}) = \underline{P(A_1A_2\ldots A_{n-2})}\cdot$
$\cdot P(A_n|A_1A_2\ldots A_{n-2})$

аналогично д/ $P(A_1A_2\ldots A_{n-2})$ и т.д. $\Rightarrow$

формула: $P(A) = P(A_1)\,P(A_2|A_1)\cdot\ldots\cdot P(A_n|A_1A_2\ldots A_n)$

Δ

2 события называются независимыми, если вероятность $P(A|B) = P(A)$ и $P(B|A) = P(B)$.

Утверждение: д/ того, чтобы 2 события были независимыми н/д. чтобы вероятность $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Формула полной вероятности

A, которое может наступить вместе с n попарно несовместных событий $H_1, H_2, \dots, H_n$: $H_i H_j = \varnothing$, $i \neq j$
причём они образуют полную группу событий: $H_1 + \dots + H_n = \Omega$
Эти события - гипотезы $(H_1, \dots, H_n)$

Событие A может наступить с одной из гипотез.

$P(H_1), P(H_2), \dots, P(H_n)$.

Даны условные вероятности:

$P(A|H_1), P(A|H_2), \dots P(A|H_n)$

$P(A)$ - ?

Выведем формулу:

$P(A) = P(A\Omega) = P[A(H_1 + \dots + H_n)] =$

$= P[AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n] =$, т.к. гипотезы попарно несовместны, то

$= P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n) =$

$= P(H_1) P(A|H_1) + P(H_2) P(A|H_2) + \dots +$

$+ P(H_n) \cdot P(A|H_n) = P(A)$.

Формула Бэйеса (Bayes).

Даны гипотезы $H_1, \dots, H_n$, образующие группу событий, они попарно несовместны.

Даны вероятности гипотез $P(H_1), \dots, P(H_n)$ и условные вероятности
$P(A|H_1), P(A|H_2), \dots, P(A|H_n)$.

Событие A может происходить с одной из гипотез, котор. образуют полную группу событий.

Событие A произошло, как изменятся вероятности гипотез? Чему равны условные вероятности?

$P(H_i|A)$ - ? $i = \overline{1,n}$

Выведем формулы;

$P(H_i|A) =$ по определению условной вероятности $= \dfrac{P(H_i A)}{P(A)} =$

$$= \boxed{\frac{P(A|H_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P(A|H_i)} = P(H_i|A)}$$

формула Бэйеса (формула гипотез)

пр. 1) 2 автомата производят детали. вероятность брака на $1 = \frac{6}{100}$,

$2 \Rightarrow \frac{9}{100}$.
производительность 1ого в 2р. больше. вероятность того, что наугад взятая деталь - брак?

2 гипотезы: (1ой и 2ой автомата)
H_1 H_2

вероятность (изготов. детали): $P(H_1) = \frac{2}{3}$ (т.к. производит. первого больше)
$P(H_2) = \frac{1}{3}$.
взятая наугад деталь будет небракована:
$P(A|H_1) = 0,94$
$P(A|H_2) = 0,91$

$P(A) = P(H_1) P(A|H_1) + P(H_2) P(A|H_2) \approx 0,93$ - вероятность того, что взятая наугад деталь небракована.

2) ф. Бэйса: прибор
вероятность безотказн. работы узлов: 0,8; 0,9. Они отказывают независимо друг от друга
(A) Прибор неисправен: вышел из строя 1 из 2ух
найти
H_1: неисправен 1ый узел
H_2: 2ой узел
H_3: 2 узла.

Событие $A = H_1 + H_2 + H_3$

$P(H_1) = 0,2 \cdot 0,9 = 0,18$
$P(H_2) = 0,8 \cdot 0,1 = 0,08$
$P(H_3) = 0,2 \cdot 0,1 = 0,02$.

$P(H_1|A) \approx 0,643$
$P(H_2|A) \approx 0,286$
$P(H_3|A) \approx 0,071$.

Схема Бернулли.
Формула Бернулли (формула повторных испытаний).

1) Проводим ряд испытаний, в результате кот.:
- „успех"
- „неудача".

2) вероятность в k-ом испытании не зависит от прошлых.

3) вероятность „успеха" одна и та же в каждом испытании (p).

вероятн. „неудач" - q: $q = 1 - p$.

провели n испытаний. Какова вероятн. того, что при n испытаниях число „удач" $= k$?

Событие A - „удача" $\Rightarrow P(A) = p$
$P(\bar{A}) = 1 - p = q$

провели n испытаний:

$B_1 = \underbrace{AA \dots A}_{k} \cdot \underbrace{\bar{A}\bar{A} \dots \bar{A}}_{n-k}$; т.к. события независимы, то

$P(B_1) = p^k q^{n-k}$

$P(B_1) = P(B_2) = \ldots = P(B_r)$

$r = C_n^k$ (число сочетаний из n по k)
события несовместны $\Rightarrow$

формула Бернулли:

$$\boxed{P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}}$$

Задача: стрелок производит 8 выстрелов. Вероятность каждого попадания: 0,8 ($p = 0,8$). Какова вероятность, что из 8 выстрелов он попадёт 5 раз?
$n = 8$
$k = 5$

Формула Пуассона.

приближённая: $\begin{cases} n \text{ - велико,} \\ p \text{ - мало.} \end{cases}$

Введём обозначения: $\lambda = np$. $\Rightarrow$

$p = \frac{\lambda}{n}$;

$$P_n(k) = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k \cdot k!} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} =$$

[т.к. n - велико, устремим $n \kappa \infty$] =

$$= \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{n^k\, k!} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k} = [n \to \infty] \Rightarrow \simeq$$

$\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{n^k} = 1.$

$\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k = \infty$ (т.к. k - фиксиров)

$\Downarrow \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

т.к. $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda} \Rightarrow$

$$\boxed{P_n(k) \simeq \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = pn}$$

ф. Пуассона.

Задача: ~~на~~ завод произвёл 1000 дет. вероятн. брака = 0,005
$n = 1000$,
$p = 0,05$.
Какова вероятн. того, что 5 деталей, кот. выбрали - бракованы.

Локальная формула
Муавра - Лапласа

n - велико,
p - конечное.

$\Rightarrow$ ф - решение задачи Бернулли.

$$P_n(k) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad \text{где}$$

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}; \quad q = 1 - p.$$

Задача: монету подбросили 1000 раз, какова вероятность того, что герб проявится 400 раз?
$n = 1000$,
$p = \frac{1}{2}$

Дискретные и непрерывные случайные величины.

Дискретная случайная величина - величина, кот. в процессе испытаний принимает конечное или счётное число значений.

Ф. распределения случайной величины X - ф. действит. переменной x:

$$F(x) = P(X < x)$$

Св-ва функции распределения: $F(x)$:

1°. $x_1 \le x_2 \Rightarrow F(x_1) \le F(x_2)$.
$F(x)$ - ф. неубывающая.

2°. $0 \le F(x) \le 1$.

3°. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 1$.

4°. $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$.

$\Downarrow$ $\{X < x_2\} = \{X < x_1\} + \{x_1 \le X < x_2\}$

несовместные события

по аксиоме сложения вероятностей.

$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$

$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2)$.

График (эскиз) ф. распределения.

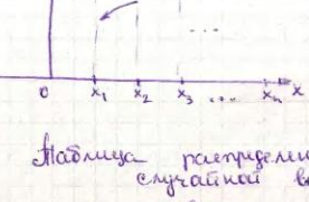
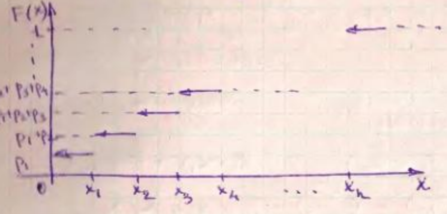


Таблица распределения дискретной случайной величины.

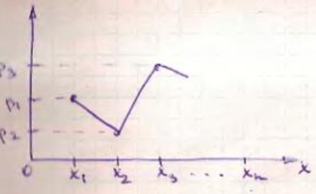
значения случ. величины	x_1	x_2	x_3	...	x_n
вероятности, с кот. дискр. величина приним. значения	p_1	p_2	p_3		p_n

$\sum\limits_{k=1}^{n} p_k = 1$

Эскиз графика ф. распределения дискретной случайной величины



Многоугольник распределения дискретной случайной величины



Если число величин счётно: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, то

$\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ – числовой ряд, сходящийся, $\Sigma = 1$.

1. Биномиальное распределение дискретной величины.

$$P\ (X = i) = C_n^i p^i\ (1-p)^{n-i}$$

i	0	1	. . .	n
P	$(1-p)^n$	$C_n^1 p (1-p)^{n-1}$		p^n

$$q^n + C_n^1 p q^{n-1} + C_n^2 p^2 q^{n-2} + \dots + p^n = (p+q)^n = 1.$$

2. Распределение Пуассона.

$$P\ (X = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda = np$$

i	0	1	2	. . .	n
P	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!} e^{-\lambda}$	. . .	$\frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

$$\sum_{i=0}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{n} \frac{\lambda^i}{i!} = e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} = 1.$$

Непрерывная случайная величина

(определ.)

X,

$$F(X) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx, \quad \text{где}$$

$\varphi(x)$ – плотность распределения.

$F'(x) = \varphi(x)$

1°. $\varphi(x) \geq 0$

2°. $P\ (x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1) =$

$= \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x) dx - \int_{-\infty}^{x_1} \varphi(x) dx$

$$\boxed{P\ (x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x)\, dx.}$$

3°. $P\ (X = x) = 0$

$P\ (x < X < x + \Delta x) = \int_{x}^{x+\Delta x} \varphi(x)\, dx =$

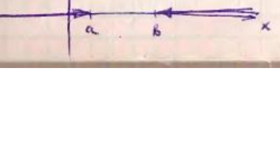
$= \varphi(\xi) \Delta x, \quad x < \xi < \Delta x.$

4°. $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\, dx = 1.$

Примеры:

1. Равномерное распределение

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & x > b. \end{cases}$$



Функция распределения

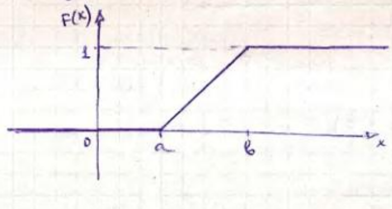
$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a \\ \frac{x-a}{x-b}, & a < x < b \\ 1, & x > b \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} \varphi(x) dx + \int_{a}^{x} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int_{a}^{x} \varphi(x) dx = \frac{1}{b-a}(x-a) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{a} \overset{0}{\varphi(x)} dx + \int_{a}^{b} \overset{1}{\varphi(x)} dx +$$

$$+ \int_{b}^{x} \overset{0}{\varphi(x)} dx = 1.$$



2. Распределение Коши

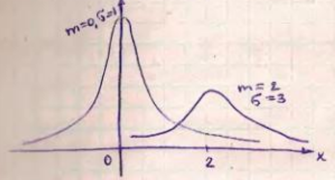
$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{1+x^2}.$$

$$P\ (\tfrac{1}{2} < X < \tfrac{3}{4}) = \frac{1}{\pi} \int_{1/2}^{3/4} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{\pi} \left(\operatorname{arctg} \tfrac{3}{4} - \right.$$

$- \operatorname{arctg} \frac{1}{2})^{\frac{1}{2}}$

3. Нормальное распределение (Гауссово распределение)

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$



Вероятность того, что величина принимает значение от a до b:

$$P(a < X < b) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{(y-m)^2}{2\sigma^2}} dy =$$

$$= \left| \begin{matrix} x = \frac{y-m}{\sigma} \\ dy = \sigma dx \\ x_{нижн} = \frac{a-m}{\sigma} \\ x_в = \frac{b-m}{\sigma} \end{matrix} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{a-m}{\sigma}}^{\frac{b-m}{\sigma}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \Phi_0\left(\frac{b-m}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(\frac{a-m}{\sigma}\right)$$

где $\Phi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$.

интеграл Лапласа

Св-ва интеграла Лапласа.

1°. Функция нечётная.

$$\Phi_0(-x) = -\Phi_0(x).$$

2°. $\Phi_0(+\infty) = \frac{1}{2}$.

3°. при $x \geq 4$, $\Phi_0(x) \approx \frac{1}{2}$.

$$P(|X - m| < \varepsilon) = \Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - \Phi_0\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) =$$

$b = m + \varepsilon$

$a = m - \varepsilon$

$$= 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) \Rightarrow \boxed{P(|X - m| < \varepsilon) = 2\Phi_0\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}$$

По заданной вероятности находим ε – обратно.

Много

Одномерная случайная величина

это Совокупность случайных величин $X = \{X_1, \dots, X_n\}$ кот. назыв. координатами случайного вектора X.

Она хар-ся функцией распределения n переменных:

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2, \dots, X_n < x_n)$$

Ограничимся случаем $n = 2$:

$$F(x_1, x_2) = P(X_1 < x_1, X_2 < x_2).$$

Св-ва ф распределения:

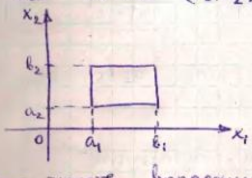
1°. $0 \leq F(x_1, x_2) \leq 1$

2° она неубывающая по каждому аргументу

3°. $F(+\infty, +\infty) = 1$

4°. $F(-\infty, -1) = 0$

5°. на пл-ти (x_1, x_2):

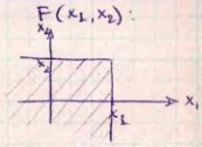


Вероятность попадания случайной величины в этот прямоугольник:

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1, a_2 \leq X_2 \leq b_2) =$$

$$= F(b_1, b_2) - F(b_1, a_2) - F(a_1, b_2) + F(a_1, a_2)$$

(Доказать). графически: $F(x_1, x_2)$:



Дискретная случайная величина.

	Y				
	y_1	y_2	y_j	y_m	
X					
x_1					
x_2					
x_i			P_{ij}		

$$P_{ij} = P(X = x_i, Y = y_j)$$

$$F(X, Y) = \sum_{\substack{i, j \\ x_i \leq x_1 \\ x_j \leq x_2}} P_{ij}$$

Непрерывная случайная величина

$$F(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{x_1} \int_{-\infty}^{x_2} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

Св-ва:

1° $F(+\infty,+\infty) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2 = 1$

2° $\varphi(x_1,x_2) \geq 0$

3° $P(a_1 < X_1 < b_1,\ a_2 < X_2 < b_2) = \int\limits_{a_1}^{b_1} dx_1 \int\limits_{a_2}^{b_2} \varphi(x_1,x_2)\,dx_2$

4° $P(x_1 < X < x_1+\Delta x_1,\ x_2 < Y < x_2+\Delta x_2) \simeq \varphi(x_1,x_2)\,\Delta x_1\,\Delta x_2$

5° $P(X = x_1,\ Y = x_2) = 0.$

Прим:

① $$\varphi(x_1,x_2) = \begin{cases} A, & x_1^2+x_2^2 \leq R^2 \\ 0, & x_1^2+x_2^2 > R^2 \end{cases}$$

$$A \iint\limits_{x_1^2+x_2^2\leq R^2} dx_1\,dx_2 = 1; \qquad A = \frac{1}{\pi R^2}$$

Одномерн. ф-ия распред.

$$P_{x_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x_1,x_2)\,dx_2 = \frac{1}{\pi R^2}\int\limits_{-\sqrt{R^2-x_1^2}}^{\sqrt{R^2-x_1^2}} dx_2 =$$

$$= \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{R^2-x_1^2}}{\pi R^2}, & x_1^2+x_2^2 \leq R^2 \\ 0, & x_1^2+x_2^2 > R^2 \end{cases}$$

Независимые случайные величины (двумерные)

Определ. Случ. величина независимая, если её ф. распределения:

$$F_{xy}(x,y) = F_x(x)\cdot F_y(y).$$

Утв.: д/ того, чтобы случайные величины были независимыми н/д, чтобы совместная плотность распределения представляла собой произв. одномерных плотностей распределения.

$$\varphi_{XY}(x,y) = \varphi_X(x)\varphi_Y(y).$$

▽ „Необходимость".

$$\varphi_{XY}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{XY}(x,y)}{\partial x\,\partial y} = \frac{dF_X}{dx}\frac{dF_Y}{\partial y} = \varphi_X(x)\cdot\varphi_Y(y)$$

„Достаточность"

$$F_{XY}(x,y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} \varphi_{XY}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{-\infty}^{x}\varphi_X(x)\,dx\int\limits_{-\infty}^{y}\varphi_Y(y)\,dy = F_X(x)\cdot F_Y(y).$$

Δ

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$
$\quad p_1, p_2, \dots, p_n$ ← вероятности

$Y = \{y_1, \dots, y_n\}$
$\quad q_1, \dots, q_n.$

независимы, если

$$P(X=x_i,\ Y=y_j) = P(X=x_i)\,P(Y=y_j)$$

Схема Бернулли.

Случ. величина (X,Y).
успех: 1,
неудача: 0.

Вероятность того, что неудача:

$P\{X=0,\ Y=0\} = P(X=0)\cdot P(Y=0) = q^2.$

$P(X=1,\ Y=0) = P(X=1)\cdot P(Y=0) = pq$

$P(X=0,\ Y=1) = P(X=0)\cdot P(Y=1) = qp$

$P(X=1,\ Y=1) = P(X=1)\cdot P(Y=1) = p^2$

Числовые характеристики (одномерной) случайной величины.

$x\ \ x_1\ x_2\ x_3 \dots x_n$
$P\ \ p_1\ p_2\ p_3 \dots p_n$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1.$$

Матем. ожидание дискретной случайной величины:

$$MX = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$$

аналогия:

$p_1\ \ p_2\ \dots\ p_n$
$x_1\ \ x_2\ \dots\ x_n \longrightarrow x$

$\sum p_i = 1;$ ц.м. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i p_i}{\sum p_i = 1} = \sum x_i p_i$

Непрерыв. случ. величина определяется плотностью распределения. $X - \varphi(x)$.

Математич. ожидание: $MX = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\varphi(x)\,dx$

Пример.

1) $$\varphi(x) = \begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{1}{b-a}, & a<x<b \\ 0, & x>b \end{cases}$$

$$MX = \int\limits_a^b \frac{1}{b-a}\,x\,dx = \frac{1}{2(b-a)}(b^2-a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

2) $P(X=i) = \dfrac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda}$, Распределение Пуассона

$\lambda = np$, $n \gg 1$, n – испытаний

$$M(X=i) = \sum_{i=0}^{\infty} i\,\frac{\lambda^i}{i!}e^{-\lambda} = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^i}{(i-1)!}e^{-\lambda} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda^{i-1}}{(i-1)!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda.$$

3) Нормальное (гауссово) распределение

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

$$MX = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}dx =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \frac{x-m}{\sigma} \\ dx = \sigma dy \end{array} \right| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} (m+\sigma y) e^{-\frac{y^2}{2}} dy =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy + \underbrace{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} y e^{-\frac{y^2}{2}} dy}_{0} =$$

$$= \frac{m}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} dy = m. \text{ (матем. ожидание)}$$

$$\left(\int_{+0}^{\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}dy\right)^2 = \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}dxdy =$$

$$= \lim_{R\to\infty} \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^R r e^{-\frac{r^2}{2}} dr.$$

Св-во математического ожидания.

1°. $MC = C$, C – const.

2°. $M(aX+b) = aMX + b$.
a, b – const.
X – случайная величина

3°. X_1, X_2. $M(X_1 + X_2) = MX_1 + MX_2$.

4°. Если X_1, X_2 – независимы, то

$M(X_1 X_2) = M(X_1)M(X_2)$.

Дисперсия случайной величины.

Хар-ет степень рассеяния случ. величины в окрестн. мат. ожидания.

Дисперсия: по опред. $DX = M(X - MX)^2$

Среднеквадратическое отклонение:
$\sigma = \sqrt{DX}$.

1. X – дискретная случайн. величина
$$DX = \sum_{i=1}^{n} (x_i - MX)^2 p_i$$

2. X – непрерывная случ. величина
$$DX = \int_{-\infty}^{\infty} (x - MX)^2 \varphi(x)\,dx.$$

Прим.

1) Вычислить дисперсию …
2) Пусть x – случ. величина;
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$
показать, что $\sigma^2 = DX$. – дисперсия

Св-ва дисперсии

1°. $C = \text{const}$, $DC = 0$

2°. $D(aX) = a D(X)$,
a = const.

3°. X, Y – независимые случ. величины, то
$D(X+Y) = D(X) + D(Y)$

4°. $D(X) = MX^2 - (MX)^2$

$$D(X) \underset{\text{по опред.}}{=} M(X-MX)^2 = M(X^2 - 2MX^2 + (MX)^2) =$$
$$= MX^2 - 2(MX)^2 + (MX)^2 = MX^2 - (MX)^2$$

Неравенства Чебышева

I: Пусть $X \geq 0$, $\varphi(x)$ – плотность распределения; $\varepsilon > 0$.

$$MX = \int_0^{\infty} x\varphi(x)\,dx = \int_0^{\varepsilon} x\varphi(x)dx + \int_{\varepsilon}^{\infty} x\varphi(x)dx \geq$$
$$\geq \int_{\varepsilon}^{\infty} x\varphi(x)\,dx \geq \varepsilon\int_{\varepsilon}^{\infty} \varphi(x)\,dx = \varepsilon P(X \geq \varepsilon)$$

1ое неравенство Чебышева:
$$\boxed{P(X \geq \varepsilon) \leq \frac{MX}{\varepsilon}}$$

Пример: матем. ожидание опоздания студента на 1 мин =1.
Какова P того, что студент опоздает не менее, чем на 5 мин?

$\varepsilon = 5$
$MX = 1$
$P(X \geq 5) \leq 0,2$.

II X; $Y = (X - MX)^2$ $|X - MX| \geq \varepsilon$

$$P(Y \geq \varepsilon) = P[|X - MX|^2 \geq \varepsilon^2] \leq \frac{MY}{\varepsilon^2} = \frac{DX}{\varepsilon^2}$$

$$\boxed{P[|X - MX| \geq \varepsilon] \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}}$$

2ое неравенство Чебышева

пример: $\varphi(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

$$MX = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-|x|} dx = 0;$$

$$\sigma^2 = D = MX^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}dx = \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} x^2 e^{-x} dx = 2$$

$P_\varepsilon = P(|X| \geq \varepsilon)$, $\varepsilon = 2; 5; 10$

$P_2 = 0{,}5$; $P_5 = \frac{2}{25} = 0{,}08$, $P_{10} = \frac{2}{100} = 0{,}02$

$$F(\varepsilon) = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \varphi(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x} e^{-|x|}dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\varepsilon} e^{-x}dx = \boxed{1 - \frac{1}{2}e^{-\varepsilon}}$$

$\varepsilon = 2$ $P_2 \approx \frac{1}{2}e^{2}$; $P_5 \approx \frac{1}{2e^5}$, $P_{10} \approx \frac{1}{2e^{10}}$

ковариация

X, Y, MX, MY,

$\overset{\circ}{X} = X - MX$, $M\overset{\circ}{X} = 0$

$\overset{\circ}{Y} = Y - MY$, $M\overset{\circ}{Y} = 0$

ковариация 2х случ величин (X, Y) – мат ожидание произведения центриров случ величин

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M(\overset{\circ}{X}, \overset{\circ}{Y}) \quad \text{или}$$

$$\mathrm{cov}(X, Y) = M[(X - MX)(Y - MY)]$$

1. X, Y – дискретн. случ величина

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \sum_{i,j} (x_i - MX)(y_j - MY)p_{ij}$$

2. Если X, Y – непрерывн. случ величины, то $\varphi(x, y)$, то

$$\mathrm{cov}(X, Y) = \iint_{-\infty}^{\infty} (x - MX)(y - MY)\,\varphi(x, y)\,dx\,dy$$

$$D(X + Y) = M[X + Y - M(X + Y)]^2 =$$

$$= M[(X - MX) + (Y - MY)]^2 =$$

$$= M[(X - MX)^2 - 2(X - MX)(Y - MY) +$$

$$+ (Y - MY)^2] = M(X - MX)^2 + 2M[(X - MX) \cdot$$

$$\cdot (Y - MY)] + M(Y - MY)^2 = DX + DY + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)$$

$$\boxed{D(X + Y) = DX + DY + 2\,\mathrm{cov}(X, Y)}$$

Случайные величины – независимы, если их ковариация $= 0$.

Св-ва ковариации.

1° $\mathrm{cov}(X, X) = DX$

2° $Y_i = a_i X_i + b_i$; $a_i; b_i$ – const, $i = 1, 2$

$$\mathrm{cov}(Y_1, Y_2) = a_1 a_2 \,\mathrm{cov}(X_1, X_2)$$

3° $\mathrm{cov}(X, Y) = M(XY) - MXMY$

4° $-\sqrt{DX \, DY} \le cov\ (X,Y) \le \sqrt{DX\,DY}$

$$Y_\lambda = \lambda X - Y$$

$$DY_\lambda = D(\lambda X) + 2cov(\lambda X, -Y) + D(-Y) =$$

$$= \lambda^2 D(X) - 2\lambda cov(X,Y) + D(Y) \ge 0$$

из условия неполож. дискриминанта $\Rightarrow$ 4°.

МАТСТАТИСТИКА (ИУ)

Основные понятия

ТВ – одна из ветвей "чистой" математики с дедуктивным построением, исходящим из вполне определённой системы аксиом.

МС – раздел прикладной математики с индуктивным построением: от наблюдений к гипотезе с аргументацией, основанной на выводах ТВ.

<u>Типовая задача ТВ.</u> При подбрасывании правильной монеты вероятность выпадения герба равна p. Какова вероятность того, что при N подбрасываниях правильной монеты герб выпадет m раз, где $m \in \{0, 1, \ldots, N\}$?

<u>Типовая задача МС.</u> При N подбрасываниях правильной монеты герб выпал m раз, где $m \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Что можно сказать о вероятности p выпадения герба при одном подбрасывании правильной монеты?

<u>Замечание.</u> Если ввести понятие "наиболее правдоподобное значение", то в соответствии с ним $p = m/N$. Но уместно рассмотреть и иные "наиболее правдоподобные значения" и считать, что $p \in (p_1; p_2)$, где $0 < p_1 < m/N < p_2 < 1$. При этом, чем больше величина $\ell \triangleq p_2 - p_1$, тем с большей уверенностью мы можем утверждать, что $p \in (p_1; p_2)$, и тем меньшую информацию относительно p мы получаем – противоречие, которое принципиально присуще МС.

<u>Основная задача МС.</u> Основная задача математической статистики – разработка методов получения научно обоснованных выводов о массовых явлениях и процессах по данным наблюдений или экспериментов. Эти выводы относятся не к отдельным экспериментам, а представляют собой утверждения о вероятностных характеристиках изучаемого процесса.

<u>Определение 1.</u> Совокупность независимых случайных величин $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{n}$, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и случайная величина $\xi(\omega)$, называют случайной выборкой объема n для $\xi(\omega)$ и обозначают $\vec{\xi}_n(\omega)$.

<u>Замечания к определению 1.</u>

1. Случайная величина $\xi(\omega)$ может быть как скалярной, так и векторной.
2. Нередко пишут
$$\overrightarrow{\xi_n(\omega)} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(\omega) \\ \cdots\cdots \\ \xi_n(\omega) \end{bmatrix},$$
называя случайную величину $\xi_k(\omega)$, где $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, k-ым элементом случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$. Таким образом $\vec{\xi}_n(\omega)$ – случайный вектор с независимыми компонентами, каждая из которых имеет тот же закон распределения, что и случайная величина $\xi(\omega)$.
3. Если $F_\xi(x) \triangleq P\{\xi(\omega) < x\}$ – функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$, то функция распределения случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$ имеет следующий вид:

$$F_{\vec{\xi}_n}(X) \equiv F_{\vec{\xi}_n}(x_1, \dots, x_n) \equiv \mathrm{P}\{\xi_k(\omega) < x_k, k \dots$$

$$\equiv \prod_{k=1}^{n} \mathrm{P}\{\xi_k(\omega) < x_k\} \equiv \prod_{k=1}^{n} F_{\xi}(x_k)$$

<u>Определение 2.</u> Любую возможную реализацию $\vec{X}_n = [x_1, \dots, x_n]^T$ случайного вектора $\vec{\xi}_n(\omega)$ называют в[ы]боркой объёма n для случайной величины $\xi(\omega)$, а x_k – k-ым элементом выборки $\vec{X}_n$, где $k \in \{1, 2, \dots, n\}$.

<u>Замечание к определению 2.</u> Множество всех возможных реализаций случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$ называют выборочным пространством. Оно содержит всю возможную информацию об исходной случайной величине $\xi(\omega)$, которая может быть получена в эксперименте.

<u>Определение 3.</u> Любую функцию $g(\vec{\xi}_n(\omega))$ случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$ называют статистикой или выборочной характеристикой, а её закон распределения – выборочным законом распределения.

<u>Замечания к определению 3.</u>

1. Реализацию $g(\vec{X}_n)$ статистики $g(\vec{\xi}_n(\omega))$, определённую по реализации $\vec{X}_n$ случайной выборки $\vec{\xi}_n(\omega)$, называют выборочным значением статистики $g(\vec{\xi}_n(\omega))$.

2 Выборочную характеристику

$$\hat{\mu}_j(\vec{\xi}_n(\omega)) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{\xi_k(\omega)\}^j, \quad j \in \{1, 2, \dots\}$$

называют выборочным начальным моментом j-го порядка. Выборочный начальный момент первого порядка называют также выборочным средним и обозначают

$$\overline{\xi(\omega)} \equiv \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega).$$

3. Выборочную характеристику

$$\hat{\nu}_j(\vec{\xi}_n(\omega)) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{\xi_k(\omega) - \overline{\xi(\omega)}\}^j, \quad j \in \{2, 3, \dots\}$$

называют выборочным центральным моментом j-го порядка. Выборочный центральный момент второго порядка называют также выборочной дисперсией и обозначают

$$\hat{s}^2(\vec{\xi}_n(\omega)) \triangleq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \{\xi_k(\omega) - \overline{\xi(\omega)}\}^2.$$

<u>Точечные оценки</u>

Пусть $\vec{\xi}_n(\omega)$ – случайная выборка объёма n для случайной величины $\xi(\omega)$, функция распределения которой $F_{\xi}(X, \beta)$ известна с точностью до неизвестного параметра β, который для упрощения дальнейших рассуждений далее считаем скалярным. Необходимо построить статистику $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$, которую можно было бы использовать в качестве точечной оценки параметра β, т.е. необходимо построить такую статистику $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$, выборочное значение $b(\overrightarrow{X_n})$ которой для имеющейся реализации $\overrightarrow{X_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ можно было бы считать приближенным значением для параметра β.

Понятно, что в качестве точечной оценки параметра β могут быть использованы различные статистики. В частности, если $\beta = M[\xi(\omega)]$, то в качестве точечной оценки $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$, наряду с выборочным средним

$$\overline{\xi(\omega)} \triangleq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega),$$

можно предложить и медиану

$$\widetilde{\xi(\omega)} \triangleq \left\{ \begin{array}{ll} \xi_{(n+1)/2}(\omega) & ;\ n = 2m+1 \\ \frac{1}{2}\left(\xi_{n/2}(\omega) + \xi_{\frac{n}{2}+1}(\omega)\right) & ;\ n = 2m \end{array} \right\}.$$

Таким образом возникает проблема выбора наилучшей в каком то смысле точечной оценки $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ для параметра β, построенной по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$

<u>Несмещённость оценки.</u> Статистику $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ называют несмещённой оценкой параметра β, если $\exists M[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})] = \beta$.

<u>Пример 1.</u> Выборочное среднее $\overline{\xi(\omega)}$ и медиана $\widetilde{\xi(\omega)}$ – несмещенные оценки для матожидания m случайной величины $\xi(\omega)$, так как согласно определению случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ для любого её k-го элемента $\xi_k(\omega)$

$$M[\xi_k(\omega)] \equiv M[\xi(\omega)] = m$$

и в силу линейности оператора M получаем:

$$M[\overline{\xi(\omega)}] = M\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M[\xi_k(\omega)] = m.$$

Аналогично доказывается несмещенность медианы. Какая из этих двух оценок является оптимальной?

<u>Пример 2.</u> Выборочная дисперсия – смещённая оценка дисперсии, так как если $m \triangleq M[\xi(\omega)]$ и $\sigma^2 \triangleq D[\xi(\omega)] = M[\{\xi(\omega) - m\}^2]$, то согласно определению случайной выборки $M[\xi_k(\omega)] = m$, $\forall k = \overline{1;n}$ и $M[(\xi_k(\omega) - m)(\xi_j(\omega) - m)] = \left\{ \begin{array}{ll} \sigma^2 & ;\ k = j \\ 0 & ;\ k \neq 0 \end{array} \right.$

Таким образом

$$M[\hat{\sigma}^2(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[\left\{\xi_k(\omega) - \overline{\xi(\omega)}\right\}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M\left[\left\{(\xi_k(\omega) - m) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\xi_j(\omega) - m)\right\}^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Bigg\{\underbrace{M[(\xi_k(\omega) - m)^2]}_{\sigma^2} - \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{M[(\xi_k(\omega) - m)(\xi_j(\omega) - m)]}_{\sigma^2;\ j=k \quad 0;\ j \neq k} +$$

$$+ \frac{1}{n^2}\Bigg(\sum_{j=1}^{n}\underbrace{M[(\xi_j(\omega) - m)^2]}_{\sigma^2} - 2\sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n}\sum_{j=1}^{n}\underbrace{M[(\xi_i(\omega) - m)(\xi_j(\omega) - m)]}_{0}\Bigg)\Bigg\} =$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\sigma^2 - \frac{2}{n}\sigma^2 + \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\sigma^2\right\} = \frac{n-1}{n}\sigma^2 \neq \sigma^2.$$

Замечание 1. В качестве несмещённой оценки дисперс используют статистику

$$\hat{\sigma}_*^2\left(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}\right) \triangleq \frac{n}{n-1}\,\hat{\sigma}^2\left(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}\right) \equiv \frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{n}\left\{\xi_k(\omega) - \overline{\xi(\omega)}\right\}^2,$$

называемую исправленной выборочной дисперсией.

Эффективность оценки. Пусть $b_1(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ и $b_2(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ – две несмещённые оценки для параметра β. Если для этих оценок существуют дисперсии и $D[b_1(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})] < D[b_2(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})]$, то говорят, что $b_1(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ – более эффективная оценка для параметра β, чем оценка $b_2(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$.

Замечание 2. В классе несмещённых оценок для параметра β оценку с минимальной дисперсией называют эффективной оценкой – возникает проблема её построения.

Замечание 3. Можно говорить об эффективной оценке в некотором подклассе класса несмещённых оценок для параметра β.

Пример 3. Выборочное среднее $\overline{\xi(\omega)}$ – эффективная оценка для $\beta \triangleq M[\xi(\omega)]$ в подклассе линейных несмещённых оценок

$$b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \lambda) \triangleq \sum_{k=1}^{n}\lambda_k\,\xi_k(\omega);$$

$$\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1 \quad; \quad \lambda_k \geqslant 0,\ \forall k=\overline{1:n};\quad \lambda \triangleq [\lambda_1,\dots,\lambda_n]^T.$$

Действительно, по условию компоненты $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{n}$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ являются независимыми случайными величинами и $\forall k=\overline{1:n}$ $M[\xi_k(\omega)] \equiv \beta$, $D[\xi_k(\omega)] \equiv \sigma^2$. Таким образом

$$M[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \lambda)] = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k M[\xi_k(\omega)] = \beta\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = \beta;$$

$$D[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \lambda)] = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 D[\xi_k(\omega)] = \sigma^2\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2.$$

Таким образом задача построения эффективной оценки в подклассе линейных несмещённых оценок для $\beta \triangleq M[\xi(\omega)]$ сводится к задаче на условный экстремум:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 \longrightarrow \min \\ &\sum_{k=1}^{n}\lambda_k = 1 \;;\; \lambda_k \geqslant 0,\ \forall k=\overline{1:n} \end{aligned}\right\},$$

которая является задачей квадратичного программирования, но мы попытаемся найти её решение с использованием функции Лагранжа

$$L[\lambda, \mu] = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k^2 + \mu\left(\sum_{k=1}^{n}\lambda_k - 1\right).$$

Решаем систему

$$\left[\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \lambda_k} = 2\lambda_k + \mu = 0, \quad k=1:n \\ &\frac{\partial L}{\partial \mu} = \sum_{k=1}^{n}\lambda_k - 1 = 0 \end{aligned}\right] \Longrightarrow \left[\begin{aligned} &\lambda_k = \frac{1}{n},\quad k=\overline{1:n}; \\ &\mu = -\frac{2}{n}. \end{aligned}\right.$$

А так как условия неотрицательности выполняются автоматически, то найденное решение – искомое и оно соответствует выборочному среднему $\overline{\xi(\omega)}$. При этом $D[\overline{\xi(\omega)}] = \frac{\sigma^2}{n}$.

Состоятельность оценки. Статистику $B(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ называют состоятельной оценкой для параметра β, если при неограниченном возрастании объёма случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ эта статистика сходится по вероятности к β, то есть

$$\exists \lim_{n\to\infty} P\left\{\left|B(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) - \beta\right| < \varepsilon\right\} = 1, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Пример 4. Выборочное среднее $\overline{\xi(\omega)}$ — состоятельная оценка для параметра $\beta \triangleq M[\xi(\omega)]$, так как $M[\overline{\xi(\omega)}] = \beta$, $D[\overline{\xi(\omega)}] = \sigma^2/n$, где $\sigma^2 \triangleq D[\xi(\omega)]$ и по второму неравенству Чебышева имеем:

$$P\left\{\left|\overline{\xi(\omega)} - \beta\right| < \varepsilon\right\} \geq 1 - \frac{D[\overline{\xi(\omega)}]}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1, \ \forall\varepsilon>0$$

Метод максимального правдоподобия построения точечных оценок был предложен Робертом Фишером, а его обоснование следует из теоремы Рао.

Теорема Рао. Пусть $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ — случайная выборка объёма n для непрерывной скалярной случайной величины $\xi(\omega)$, плотность распределения вероятностей которой $f_\xi(x,\beta)$ зависит от неизвестного скалярного параметра $\beta \in R^1$. Пусть далее $G \triangleq \{x: f_\xi(x,\beta) > 0\}$, $\vec{X} \triangleq [x_1, x_2, \dots, x_n]^T \in R^n$ и

(1) плотность распределения вероятностей
$$f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta) \equiv f_{\vec{\xi}_n}(x_1,\dots,x_n,\beta) = \prod_{k=1}^{n} f_\xi(x_k,\beta)$$
случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ дифференцируема по параметру β;

(2) допустимо дифференцирование под знаком интеграла по параметру β плотности распределения вероятностей случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, то есть
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{R^n} f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X} = \int_{R^n}\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X};$$

(3) количество информации по Фишеру относительно параметра β, содержащееся в случайной выборке $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, больше нуля, то есть
$$J(\beta) \triangleq M\left[\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)\right\}^2\right] \equiv$$
$$\equiv \int_{G^n}\left\{\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\right\}^2 f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X} > 0;$$

(4) оценка $B(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ не зависит от оцениваемого параметра β, то есть имеет место равенство
$$\frac{\partial}{\partial\beta}\int_{G^n} B(\vec{X}) f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X} \equiv \int_{G^n} B(\vec{X})\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X}$$

Если условия (1)–(4) выполнены и статистика $B(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ является несмещённой оценкой для β, то $D[B(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})] > 1/J(\beta)$.

◀ В соответствии с основным свойством плотности распределения вероятностей имеет место тождество:
$$\int_{G^n} f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X} \equiv 1.$$

Таким образом
$$0 \equiv \frac{\partial}{\partial\beta}1 \equiv \frac{\partial}{\partial\beta}\int_{G^n} f_{\vec{\xi}_n}(\vec{X},\beta)\,d\vec{X} \equiv \{\text{см. условие (2)}\} \equiv$$

$$\equiv \int_{G^n} \frac{\partial}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX \equiv \int_{G^n} \frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX$$

то есть имеет место тождество

$$M\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)\right] \equiv 0 .$$

Так как по условиям теоремы статистика $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ является несмещённой оценкой для параметра β, то имеет место равенство

$$\beta \equiv M\left[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\right] \equiv \int_{G^n} b(X) f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX .$$

Но тогда, с учётом условия (4) рассматриваемой теоремы имеем:

$$1 \equiv \frac{\partial}{\partial\beta}\beta \equiv \frac{\partial}{\partial\beta}\int_{G^n} b(X) f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX \equiv$$

$$\equiv \int_{G^n} b(X)\frac{\partial}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX \equiv \int_{G^n} b(X)\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)}{\partial\beta} f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX .$$

Таким образом

$$M\left[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)}{\partial\beta}\right] \equiv 1 . \qquad (**)$$

Для завершения доказательства достаточно воспользоваться тождествами (*) и (**), неравенством Шварца, являющегося интегральным аналогом Коши-Буняковского, и условием (3):

$$1^2 \equiv \left\{M\left[\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)}{\partial\beta}\cdot\left(b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})-\beta\right)\right]\right\}^2 \equiv$$

$$\equiv \left\{\int_{G^n}\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)}{\partial\beta}\cdot\left(b(X)-\beta\right)\cdot f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX\right\}^2 \equiv$$

$$\equiv \left(\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)}{\partial\beta}\,;\; b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})-\beta\right)^2 \leq \left\{\begin{matrix}\text{Нер-во}\\ \text{Шварца}\end{matrix}\right\} \leq$$

$$\leq \left\|\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)}{\partial\beta}\right\|^2\cdot\left\|b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})-\beta\right\|^2 \equiv$$

$$\equiv \int_{G^n}\left\{\frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)}{\partial\beta}\right\}^2 f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX\cdot\int_{G^n}\left\{b(X)-\beta\right\}^2 f_{\vec{\xi}_n}(X,\beta)\,dX \equiv$$

$$\equiv \left\{\begin{matrix}\text{см.}\\ \text{условие (3)}\end{matrix}\right\} \equiv I(\beta)\cdot D\left[\xi_n(\omega)\right],$$ что и требовалось доказать ►

Следствия из теоремы Рао.

1. Неравенство Шварца обращается в равенство лишь при наличии линейной зависимости сомножителей в скалярном произведении. Таким образом

$$D\left[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\right] = \frac{1}{I(\beta)} \iff$$

$$\iff \frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)},\beta)}{\partial\beta} = k(\beta)\left\{b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})-\beta\right\} -$$

условие существования эффективной оценки для параметра β, то есть условие существования несмещённой оценки для β, построенной по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ и обладающей минимальной дисперсией.

2. Если $b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ — эффективная оценка для $D\left[b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\right] =$

$= \ldots (\beta)$ и

$$\left\{ \frac{\partial \ln f_{\vec{\xi}_n}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta)}{\partial \beta} \right\}^2 = k^2(\beta) \left\{ b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) - \beta \right\}^2 .$$

Применив оператор нахождения математического ожидания к левой и правой частям этого равенства с учётом определений количества информации по Фишеру и дисперсии, получаем:

$$J(\beta) = k^2(\beta)\, D[\, b(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\,] \Big|_{D[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}] = J^{-1}(\beta)} .$$

Таким образом $k(\beta) = J(\beta)$.

<u>Идея метода</u> максимального правдоподобия построения точечных оценок состоит в следующем.

I. Пусть $\xi(\omega)$ – дискретная скалярная случайная величина с множеством возможных значений $\{x_j\}_{j=1}^{N}$, где $N \le \infty$. Пусть функция распределения $F_\xi(x, \beta) \triangleq P\{\xi(\omega) < x\}$ зависит от неизвестного значения параметра β, которое необходимо оценить по данным выборки $\overrightarrow{X_n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$.

Если N_j – число повторов возможного значения x_j дискретной скалярной случайной величины $\xi(\omega)$ в выборке $\overrightarrow{X_n}$ и $p_j(\beta) \triangleq P\{\xi(\omega) = x_j\}$ – вероятность реализации этого значения, то искомое значение $b(\overrightarrow{X_n})$ точечной оценки для параметра β – точка экстремума функции правдоподобия

$$L(\overrightarrow{X_n}, \beta) \triangleq \prod_{j=1}^{N} \{ p_j(\beta) \}^{N_j},$$

зависящая от элементов выборки $\overrightarrow{X_n}$.

<u>Пример 1.</u> Пусть дискретная скалярная случайная величина $\xi(\omega)$ распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda > 0$. По данным выборки $\overrightarrow{X_n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ необходимо найти значение $\hat{\lambda}(\overrightarrow{X_n})$ оценки для параметра λ.

В рассматриваемом случае $x_k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $\forall k = \overline{1:n}$.

$$p_j(\lambda) \triangleq P\{\xi(\omega) = j\} = \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda}, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

Пусть далее $\tau \triangleq \max\{x_1, \ldots, x_n\}$ и $N_0, N_1, \ldots, N_\tau$ – число повторов чисел $0, 1, \ldots, \tau$ в выборке $\overrightarrow{X_n}$ соответственно. В этом случае функция правдоподобия

$$L(\overrightarrow{X_n}, \lambda) = \prod_{j=0}^{\tau} \left\{ \frac{\lambda^j}{j!} e^{-\lambda} \right\}^{N_j} .$$

А так как функция $y = \ln x$ при $x > 0$ монотонно возрастает, то функции $L(\overrightarrow{X_n}, \lambda)$, $\ln L(\overrightarrow{X_n}, \lambda)$ имеют одинаковые точки экстремума. Таким образом

$$\ln L(\overrightarrow{X_n}, \lambda) = \sum_{j=0}^{\tau} N_j \{ j \ln \lambda - \ln(j!) - \lambda \} ;$$

$$\frac{\partial \ln L(X_n, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 = \sum_{j=0}^{\tau} N_j \left\{ \frac{j}{\lambda} - 1 \right\} = \frac{1}{\lambda} \sum_{j=0}^{\tau} j \cdot N_j - \sum_{j=0}^{\tau} N_j \equiv$$

$$\equiv \frac{1}{\lambda} \sum_{k=1}^{n} x_k - n \Longrightarrow \hat{\lambda}(X_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k \equiv \overline{X} .$$

II. Пусть $\xi(\omega)$ – непрерывная скалярная случайная величина, плотность распределения вероятностей $f_\xi(x,\beta)$ которой зави[сит от] неизвестного значения параметра β, которое нужно оценить [по] данным выборки $\overrightarrow{X_n}$.

В рассматриваемом случае функция правдоподобия

$$L(\overrightarrow{X_n},\beta) \triangleq \prod_{k=1}^{n} f_\xi(x_k,\beta)$$

и осталось найти для неё точку экстремума $\beta(\overrightarrow{X_n})$, зависящую от элементов выборки $\overrightarrow{X_n}$.

Пример 2. Пусть $\xi(\omega) \sim N(m,\sigma^2)$ и неизвестные значения параметров m и σ^2 необходимо оценить по данным выборки $\overrightarrow{X_n} = [x_1,\dots,x_n]^T$.

В рассматриваемом случае имеем:

$$L(\overrightarrow{X_n},m,\sigma^2) = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x_k-m)^2}{2\sigma^2}\right\} =$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} (\sigma^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2\right\};$$

$$\ln L(\overrightarrow{X_n},m,\sigma^2) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2;$$

$$\frac{\partial \ln L(\overrightarrow{X_n},m,\sigma^2)}{\partial m} = 0 = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m) \Longrightarrow \hat{m}(\overrightarrow{X_n}) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k = \overline{X}$$

$$\frac{\partial \ln L(\overrightarrow{X_n},m,\sigma^2)}{\partial \sigma^2} = 0 = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum_{k=1}^{n}(x_k-m)^2 \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow \hat{\sigma}^2(\overrightarrow{X_n})\Big|_{\hat{m}(\overrightarrow{X_n})=\overline{X}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\overline{X})^2 -$$

реализация выборочной дисперсии, которая является смещённой оценкой дисперсии.

Интервальные оценки

Основные понятия

1. Интервальная оценка – оценка, позволяющая получить вероятностную характеристику точности (качества) оценивания неизвестного значения параметра β закона распределения $F_\xi(x,\beta)$ случайной величины $\xi(\omega)$ по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$.

2. Пусть $\underline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ и $\overline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ - две статистики такие, что

$$P\{\underline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) < \beta < \overline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\} = \gamma .$$

В этом случае интервал

$$(\underline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)});\ \overline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}))$$

со случайными границами $\underline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$, $\overline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ называют интервальной оценкой для β с коэффициентом доверия γ или γ-доверительным интервалом для параметра β.

3. Вероятность α совершения ошибки при нахождении интервальной оценки для параметра β с коэффициентом доверия γ определяется очевидными равенствами:

$$\alpha \triangleq 1-\gamma = P\{\beta \notin (\underline{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)});\ \bar{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}))\}.$$

4. Вероятностной характеристикой точности оценивания значения параметра β является случайная величина
$$l(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \triangleq \bar{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) - \underline{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}),$$
называемая размахом γ-доверительного интервала для параметра β, построенного по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$.

5. Если $P\{\underline{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) < \beta\} = \gamma$ или $P\{\beta < \bar{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\} = \gamma$, то статистики $\underline{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$, $\bar{b}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})$ называют соответственно односторонней нижней и односторонней верхней γ-доверительными границами для параметра β.

Построение интервальных оценок.

Пусть закон распределения непрерывной случайной величины $\xi(\omega)$ зависит от неизвестного значения параметра β. Необходимо по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ построить интервальную оценку для β с коэффициентом доверия $\gamma = 1-\alpha$.

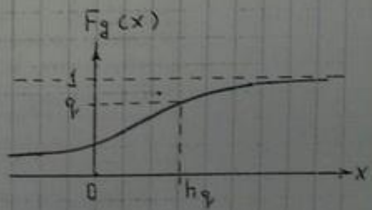
При дальнейших рассуждениях статистику $g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta)$ будем называть центральной, если её закон распределения не зависит от β, т.е. функция распределения
$$F_g(x) \triangleq P\{g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta) < x\}$$
не зависит от β.

Для упрощения дальнейших рассуждений будем предполагать, что для любой реализации $\overrightarrow{X_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ выполнены следующие допущения:

(1) функция $g(\overrightarrow{X_n}, \beta)$ определена $\forall \beta \in R^1$, непрерывна и монотонно возрастает по β;

(2) функция распределения $F_g(x)$ центральной статистики $g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta)$ является непрерывной и монотонно возрастающей;

(3) Заданы положительные числа α_1 и α_2 такие, что $\gamma = 1-\alpha_1-\alpha_2$, т.е. $\alpha = \alpha_1+\alpha_2$.



Согласно допущению (2) для любого $q \in (0;1)$ существует единственный корень h_q уравнения $F_g(x) = q$, который называют квантилем уровня q функции распределения $F_g(x)$ центральной статистики $g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta)$. Таким образом,
$$\gamma = (1-\alpha_2)-\alpha_1 = F_g(h_{1-\alpha_2}) - F_g(h_{\alpha_1}) = P\{h_{\alpha_1} < g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta) < h_{1-\alpha_2}\}$$

Согласно допущению (1) для каждой реализации $\overrightarrow{X_n}$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ уравнения
$$g(\overrightarrow{X_n}, \beta) = h_{\alpha_1}\ ; \quad g(\overrightarrow{X_n}, \beta) = h_{1-\alpha_2}$$
имеют единственные решения $\underline{b}(\overrightarrow{X_n})$ и $\bar{b}(\overrightarrow{X_n})$ соответственно. При этом

$$\{h_{\alpha_1} < g(\overrightarrow{X_n}, \beta) < h_{1-\alpha_2}\} \Longleftrightarrow \{\underline{\beta}(\overrightarrow{X_n}) < \beta < \overline{\beta}(\overrightarrow{X_n})\}$$

для каждой возможной реализации $\vec{X}_n$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n}$(
Таким образом,

$$\gamma = 1-\alpha_1-\alpha_2 = P\{h_{\alpha_1} < g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta) < h_{1-\alpha_2}\} = P\{\underline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) < \beta <$$
$$< \overline{\beta}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})\}$$

и как следствие $(\underline{\beta}(\xi_n(\omega)); \overline{\beta}(\xi_n(\omega)))$ – искомая интервальна оценка для неизвестного значения параметра β.

<u>Задача 1.</u> Пусть $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где дисперсия σ^2 – известна. По данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ необх димо построить γ-доверительный интервал для m, если заданы $\alpha_1 > 0$ и $\alpha_2 > 0$ такие, что $\gamma = 1-\alpha_1-\alpha$

<u>Решение.</u> Полагаем

$$g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\{m - \overline{\xi(\omega)}\} \equiv \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\{m - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)\} \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{m-\xi_k(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}$$

Согласно определению случайной выборки $\{\xi_k(\omega)\}_{k=1}^{n}$ – независимы и имеют распределение $N(m, \sigma^2)$. Таким образом,

$$M[g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{m - M[\xi_k(\omega)]}{\sigma\sqrt{n}} = 0,$$

$$D[g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m)] = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sigma^2 n} D[\xi_k(\omega)] = 1.$$

А так как можно показать, что линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин – нормальная случайная величина, то $g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m) \sim N(0,1)$
Таким образом статистика $g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m)$ являетя централькa допущения (1)–(3) выполнены и если h_{α_1}, $h_{1-\alpha_2}$ – квантили стандартного нормального закона, то

$$h_{\alpha_1} \equiv g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \underline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})) \equiv \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\{\underline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) - \overline{\xi(\omega)}\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \underline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \equiv \overline{\xi(\omega)} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{\alpha_1};$$

$$h_{1-\alpha_2} \equiv g(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \overline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)})) \equiv \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\{\overline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) - \overline{\xi(\omega)}\} \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \overline{m}(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \equiv \overline{\xi(\omega)} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-\alpha_2}.$$

<u>Пример 1.</u> При фиксированном угле вертикальной наводки из тяжелого миномета произведено 9 выстрелов – результаты пре ставлены в следующей таблице:

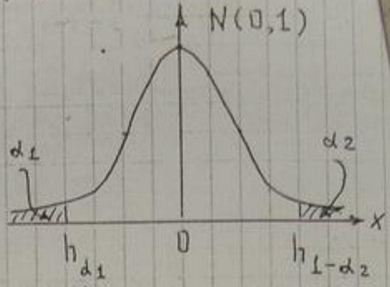
к – номер выстрела	1	2	3	4	5	6	7	8	9
x_k – дальность (км)	3.95	4.03	4.01	3.98	3.99	3.94	4.02	3.97	4.11

С доверительной вероятностью $\gamma = 0.9$ нужно определить реализацию симметричного доверительного интервала для дальност если среднеквадратическое отклонение по дальности известно: $\sigma = 0.05$ (км).

Из артиллерии известно, что точка падения мины – двухмерная случайная величина с нормальным законом распределения. Поэтому дальность $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$ где $\sigma = 0.05$ (км). Объём выборки $n = 9$, т.е выборочное среднее

$$\overline{X} = \frac{1}{9}(3.95+4.03+4.01+3.98+3.99+3.94+4.02+3.97+4.11) = 4.$$

Согласно условию $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2 = 0.05$. Из симметричности графика функции плотности распределения вероятностей стандартного нормального закона следует, что



$$h_{1-(1-\gamma)/2} = h_{0.95} = 1.645 = -h_{0.05} = -h_{(1-\gamma)/2}$$

Таким образом имеем:

$$\underline{m}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-(1-\gamma)/2} = 4 - \frac{0.05}{\sqrt{9}} \cdot 1.645 = 4 - 0.027;$$

$$\overline{m}(\overrightarrow{X_n}) = \overline{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-(1-\gamma)/2} = 4 + \frac{0.05}{\sqrt{9}} \cdot 1.645 = 4 + 0.027.$$

Замечания к задаче 1.

1. В условиях задачи 1 размах доверительного интервала

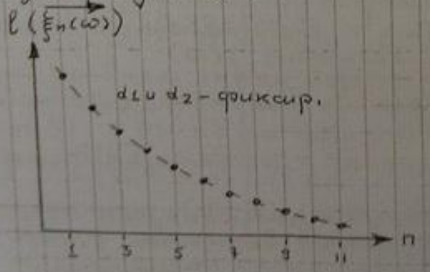
$$\ell(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \equiv \{h_{1-\alpha_2} - h_{\alpha_1}\} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

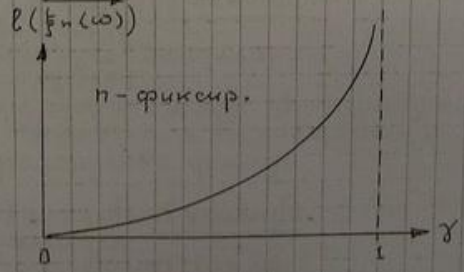
— детерминированная величина, зависящая лишь от объёма n используемой случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, доверительной вероятности γ и выбора α_1, так как $\alpha_2 = 1-\gamma-\alpha_1$.

2. Из графического представления плотности распределения вероятностей для стандартного нормального закона следует, что при при фиксированных n и γ, т.е. при фиксированном объёме используемой случайной выборки и фиксированной доверительной вероятности γ, минимальным размахом обладает симметричный доверительный интервал:

$$\min_{\substack{\gamma = 1-\alpha_1-\alpha_2 \\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0}} \ell(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \equiv 2\frac{\sigma}{\sqrt{n}} h_{1-(1-\gamma)/2}.$$

3. Изменение размаха доверительного интервала в зависимости от объёма n используемой случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ и γ-доверительной вероятности представлены на следующих рисунках:





4. Можно сформулировать и решить простейшую задачу планирования объёма испытаний n: при известной дисперсии σ^2 с заданной доверительной вероятностью $\gamma = 1-\alpha_1-\alpha_2$ найти объё. случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, обеспечивающий требуемую точность в.р. оценки математического ожидания случайной величины $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$.

Действительно

$$\left\{h_{1-\alpha_2} - h_{\alpha_1}\right\}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \ell_{тр} \Longrightarrow n \geqslant \left\{h_{1-\alpha_2} - h_{\alpha_1}\right\}^2 \frac{\sigma^2}{\ell_{тр}^2}$$

<u>Пример 2.</u> Пусть $\alpha_1 = \alpha_2$, $\gamma = 0.9$, $\sigma^2 = 0.04$, $\ell_{тр} = 0.2$. В это случае $\alpha_1 = \alpha_2 = (1-\gamma)/2 = 0.05$ и $h_{1-\alpha_2} = h_{0.95} = -h_{\alpha_1} = -h_{0.0}$ $\cong 1.645$. Таким образом

$$n \geqslant \left\{2 \cdot 1.645\right\}^2 \cdot \frac{0.04}{(0.2)^2} = (3.29)^2 \simeq 10.82, \text{ т.е. } n \geqslant 11$$

Проверка статистических гипотез

Ранее мы рассматривали следующую задачу: по данным случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ для случайной величины $\xi(\omega)$, закон распределения которой $F_\xi(x, \beta)$ известен с точностью до неизвестного значения параметра β, необходимо найти „хорошую" оценку для истинного значения β. При этом, априорная информация относительно истинного значения параметра β полностью отсутствует.

На данном этапе будем предполагать наличие определённой априорной информации относительно параметра β, позволяющей выдвинуть предположение (гипотезу) о величине истинного значения этого параметра типа

$$H: \beta = \beta_0 \quad \text{или} \quad H: \beta > \beta_1 \quad \text{или} \quad H: \beta \leq \beta_2$$

и так далее. При этом надлежит ответить на вопрос о согласованности выдвинутой гипотезы H с результатами эксперимента, представленными выборкой $\overrightarrow{X_n}$.

<u>Определение 1.</u> Статистическая гипотеза — любое высказывание относительно закона распределения наблюдаемой случайной величины.

<u>Определение 2.</u> Статистическую гипотезу относительно неизвестного истинного значения параметра известного закона распределения наблюдаемой случайной величины называют параметрической гипотезой.

<u>Пример 1.</u> Пусть $\overrightarrow{X_n}$ — выборка — реализация случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ объёма n для наблюдаемой непрерывной скалярной случайной величины $\xi(\omega)$.

$$H: f_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right\}, \ \forall x \in R^1 -$$

пример непараметрической статистической гипотезы.

<u>Пример 2.</u> Пусть известно, что наблюдаемая непрерывная скалярная случайная величина $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где значения математического ожидания m и дисперсии σ^2 неизвестны. $H: (m = 0) \wedge (\sigma^2 > 1)$ — пример параметрической гипотезы.

<u>Определение 3.</u> Если параметрическая гипотеза H полностью определяет функцию распределения наблюдаемой случайной величины как однозначную функцию своего ар

гумента, то статистическую параметрическую гипотезу H называют простой. В противном случае статистическию параметрическую гипотезу H называют сложной.

<u>Пример 3.</u> Известно, что $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где значения математического ожидания m и дисперсии σ^2 неизвесьна. В этом случае параметрическая гипотеза

$H_1: (m = 1) \wedge (\sigma^2 = 4)$ — простая;
$H_2: (m \neq 0) \wedge (1 < \sigma^2 \leq 4)$ — сложная;
$H_3: (m > 1) \wedge (\sigma^2 = 1)$ — сложная.

<u>Замечание 1.</u> При дальнейших рассуждениях будем проверять статистическую гипотезу H_0, называемую нулевой или основной, при наличии конкурирующей или альтернативной статистической гипотезы H_1. По данным выборки $\overrightarrow{X_n}$ необходимо принять решение об истинности одной из указанных статистических гипотез.

<u>Определение 4.</u> Критерием проверки статистических гипотез называют правило принятия решения об истинности либо основной (нулевой), либо конкурирующей (альтернативной) статистической гипотезы по данным выборки $\overrightarrow{X_n}$, являющейся реализацией случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ для наблюдаемой случайной величины $\xi(\omega)$.

<u>Замечание 2.</u> Критерий проверки статистических гипотез задают с помощью критического множества W, которое является подмножеством множества $\mathcal{X}_n$ всех возможных реализаций случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, то есть подмножеством выборочного пространства. Правило принятия решений (решающее правило) имеет следующий вид:

$(\overrightarrow{X_n} \in W) \implies$ отклонить H_0 и принять H_1;
$(\overrightarrow{X_n} \in \overline{W} \triangleq \mathcal{X}_n \setminus W) \implies$ принять H_0.

<u>Замечание 3.</u> При решении задач проверки статистических гипотез с использованием любого критерия возможны ошибки двух принципиально различных видов:

1. Принять конкурирующую гипотезу H_1 при истинности основной гипотезы H_0 — ошибка I-го рода. Вероятность её совершения

$$\alpha = P\{\overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \mid H_0\}$$

называют уровнем значимости критерия;

2. Принять основную гипотезу H_0 при истинности конкурирующей гипотезы H_1 — ошибка II-го рода. Вероятность её совершения

$$\beta = P\{\overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in \overline{W} \mid H_1\}.$$

При этом величину $(1 - \beta)$, то есть вероятность несовершения ошибки II-го рода называют мощностью критерия.

<u>Замечание 4.</u> При построении критерия для проверки статистических гипотез исходят из необходимости максимизации его мощности при заданном уровне значимости, что обусловлено невозможностью одновременной минимизации вероятностей совершения ошибок I-го и II-го рода. Анализ этого обстоятельства мы проведём далее.

Проверка простых параметрических гипотез

Постановка задачи. $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ – случайная выборка объёма n для случайной величины $\xi(\omega)$, закон распределения которой $F_\xi(x, \beta)$ зависит от неизвестного истинного значения параметра β. Необходимо проверить основную гипотезу $H_0: \beta = \beta_0$ при наличии конкурирующей гипотезы $H_1: \beta = \beta_1$, где $\beta_0 \neq \beta_1$.

Решение. Для решения рассматриваемой задачи проверки двух простых параметрических гипотез введём функцию случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$

$$\varphi(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \triangleq L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta_1) / L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \beta_0) ,$$

представляющую собой отношение функций правдоподобия случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ при истинности конкурирующей и основной гипотез соответственно. Выбор критического множества W реализуем следующим образом:

$$W \triangleq \{ \overrightarrow{X_n} \in \mathcal{X}_n : \varphi(\overrightarrow{X_n}) \geqslant C_\varphi \} ,$$

где $\mathcal{X}_n$ – выборочное пространство используемой случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, а постоянная C_φ определяется из условия

$$P\{ \varphi(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \geqslant C_\varphi \mid H_0 \} = \alpha ,$$

обеспечивающего заданное значение уровня значимости α построенного критерия.

-14-

Замечание 5. Построенный критерий известен как критерий Неймана – Пирсона. Можно показать, что при заданном уровне значимости α критерий Неймана – Пирсона является наиболее мощным.

Пример 4. $\xi(\omega) \sim N(m, \sigma^2)$, где дисперсия σ^2 известна, а истинное значение математического ожидания m – нет. По данным случайной выборки

$$\overrightarrow{\xi_n(\omega)} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(\omega) \\ ----- \\ \xi_n(\omega) \end{bmatrix}$$

необходимо проверить основную гипотезу $H_0: m = m_0$ при наличии конкурирующей гипотезы $H_1: m = m_1$, где $m_1 > m_0$.

Согласно определению случайной выборки в рассматриваемом случае функция правдоподобия

$$L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m) \equiv \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{ -\frac{(\xi_k(\omega) - m)^2}{2\sigma^2} \right\} \equiv \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2} \right)^{\frac{n}{2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} (\xi_k(\omega) - m)^2 \right\} .$$

Таким образом

$$\varphi(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \triangleq \frac{L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m_1)}{L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, m_0)} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \left[\sum_{k=1}^{n} (\xi_k(\omega) - m_1)^2 - \sum_{k=1}^{n} (\xi_k(\omega) - m_0)^2 \right] \right\} \equiv$$

$$\equiv \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \left(\xi_k^2(\omega) - 2m_1 \xi_k(\omega) + m_1^2 - \xi_k^2(\omega) + 2m_0 \xi_k(\omega) - m_0^2 \right) \right\}$$

$$\equiv \exp\left\{ \frac{m_1 - m_0}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) - \frac{n}{2\sigma^2}\left(m_1^2 - m_0^2\right) \right\}$$

и для любой реализации $\overrightarrow{X_n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ имеем:

$$\left(\varphi(\overrightarrow{X_n}) \geqslant C_\varphi\right) \Longleftrightarrow \left(\ln \varphi(\overrightarrow{X_n}) \geqslant \ln C_\varphi\right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{m_1 - m_0}{\sigma^2} \sum_{k=1}^{n} x_k - \frac{n}{2\sigma^2}\left(m_1^2 - m_0^2\right) \geqslant \ln C_\varphi \right) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant C \equiv \frac{\sigma^2}{m_1 - m_0} \left\{ \ln C_\varphi - \frac{n}{2\sigma^2}\left(m_1 - m_0\right) \right\} \right).$$

и, как следствие, критическое множество

$$W = \left\{ \overrightarrow{X_n} \in \mathcal{X}_n : \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant C \right\},$$

где C определяется из условия

$$P\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \geqslant C \,\middle|\, H_0 \right\} = \alpha.$$

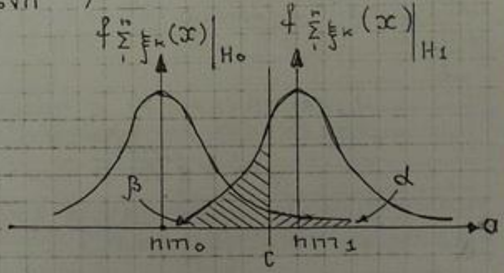
А так как при истинности основной гипотезы H_0, то есть при $m = m_0$

$$\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \sim N(nm_0, n\sigma^2),$$

то вероятность совершения ошибки I-го рода

$$\alpha = P\left\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,\middle|\, H_0 \right\} \equiv P\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \geqslant C \,\middle|\, H_0 \right\} = 1 -$$

$$- \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}} \right) \Longleftrightarrow \Phi\left(\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}} \right) = 1 - \alpha.$$



Таким образом

$$\frac{C - nm_0}{\sigma\sqrt{n}} = h_{1-\alpha} \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow C = nm_0 + \sigma\sqrt{n}\, h_{1-\alpha},$$

где $h_{1-\alpha}$ – квантиль уровня $1-\alpha$ стандартного нормального закона $N(0.1)$. При этом, вероятность совершения ошибки II-го рода

$$\beta = P\left\{ \xi_n(\omega) \in \overline{W} \,\middle|\, H_1 \right\} \equiv P\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) < C \right\} = \Phi\left(\frac{C - nm_1}{\sigma\sqrt{n}} \right) =$$

$$= \Phi\left(h_{1-\alpha} - \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(m_1 - m_0) \right).$$

<u>Пример 5.</u> Проводятся испытания по схеме Бернулли и p – вероятность успеха в каждом отдельном испытании. Необходимо проверить основную гипотезу $H_0: p = p_0$ при наличии конкурирующей гипотезы $H_1: p = p_1 < p_0$ по данным случайной выборки

$$\overrightarrow{\xi_n(\omega)} \triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(\omega) \\ \text{-----} \\ \xi_n(\omega) \end{bmatrix},$$

где $\xi_k(\omega)$ – исход k-го испытания – дискретная случайная величина с вероятностью p принимающая значение 1 и с вероятностью $1-p$ принимающая значение 0. При этом предполагается, что объём испытаний n – велик.

В рассматриваемом случае статистика

$$M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}] \triangleq \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega)$$

определяет общее число успехов в серии из n испытаний, проводимых по схеме Бернулли, и функция правдоподобия

$$L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, p) \equiv C_n^{M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]} p^{M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]} (1-p)^{n-M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]}.$$

Таким образом

$$\varphi(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}) \triangleq \frac{L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, p_1)}{L(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, p_0)} \equiv \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]} \left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)^{n-M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]}$$

и для любой реализации $\overrightarrow{X_n} = [x_1, x_2, \ldots, x_n]^T$ случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ имеем:

$$(\varphi(\overrightarrow{X_n}) \geqslant C_\varphi) \Longleftrightarrow (\ln \varphi(\overrightarrow{X_n}) \geqslant \ln C_\varphi) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(M[\overrightarrow{X_n}] \ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) + \{n - M[\overrightarrow{X_n}]\} \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right) \geqslant \ln C_\varphi\right) \quad (*)$$

А так как согласно условию $p_1 < p_0$, то

$$\frac{p_1}{p_0} < 1 \quad \text{и} \quad \frac{1-p_1}{1-p_0} > 1 .$$

Поэтому неравенство (*) может быть представлено в следующем виде:

$$M[\overrightarrow{X_n}] \equiv \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant C \equiv \left\{\ln C_\varphi - n \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\} \cdot \left\{\ln\left(\frac{p_1}{p_0}\right) - \ln\left(\frac{1-p_1}{1-p_0}\right)\right\}^{-1}$$

и мы приходим к практически уже известному (см пример 4) определению критического множества

$$W = \left\{\overrightarrow{X_n} \in \mathcal{X}_n : \sum_{k=1}^{n} x_k \leqslant C\right\},$$

где C определяется заданным уровнем значимости α критерия из условия

$$P\left\{\sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \leqslant C \,\middle|\, H_0\right\} = \alpha .$$

Согласно исходным допущениям объём испытаний достаточно велик, то есть согласно теореме Муавра-Лапласа случайная величина $M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}]$ является асимптотически нормальной, то есть при истинности основной гипотезы $H_0: p = p_0$ можно считать, что $M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}] \sim N(np_0, np_0(1-p_0))$. Но тогда

$$\alpha = P\{M[\overrightarrow{\xi_n(\omega)}] \leqslant C \,|\, H_0\} = \Phi\left(\frac{C - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}}\right).$$

Таким образом находим

$$C = np_0 + \sqrt{np_0(1-p_0)}\, h_\alpha .$$

Проверка сложных параметрических гипотез

Предположим, что необходимо проверить две сложные параметрические гипотезы

$$H_0 : b \in B_0 \quad ; \quad H_1 : b \in B_1 ,$$

где B_0 и B_1 – два непересекающихся множества возможных значений параметра b, от которого зависит закон распределения $F_\xi(x, b)$ наблюдаемой случайной величины $\xi(\omega)$. При этом следует заметить что в отличие от рассмотренной задачи проверки простых параметрических гипотез в данном случае множества B_0 и B_1 не являются одноэлементными. Так например, $B_0 = \{ b \in R^1 : b < b_0 \}$ и $B_1 = \{ b \in R^1 : b_0 < b_{1*} \leq b \leq b_1^* \}$.

В рассматриваемой ситуации, как и при решении задачи проверки двух простых параметрических гипотез, критерий задают с помощью критического множества $W \subseteq \mathcal{X}_n$, где $\mathcal{X}_n$ – выборочное пространство используемой случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$. Остаётся неизменным и решающее правило: если $\overrightarrow{X_n}$ – используемая выборка, то есть реализация случайной выборки $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$, тогда

$$(\overrightarrow{X_n} \in W) \Longrightarrow \text{отклонить } H_0 \text{ и принять } H_1 ;$$

$$(\overrightarrow{X_n} \in \overline{W} \triangleq \mathcal{X}_n \setminus W) \Longrightarrow \text{принять } H_0 .$$

Вероятности совершения ошибок I-го и II-го рода при проверке сложных параметрических гипотез сохраняют свой смысл но являются функциями параметра b:

$$\alpha(b) \triangleq P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,|\, H_0 \} \equiv P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,|\, b \in B_0 \} \quad ;$$

$$\beta(b) \triangleq P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in \overline{W} \,|\, H_1 \} \quad P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in \overline{W} \,|\, b \in B_1 \} \quad .$$

<u>**Определение 5.**</u> При решении задачи проверки сложных параметрических гипотез $H_0 : b \in B_0$; $H_1 : b \in B_1$ величину

$$\alpha \triangleq \sup_{b \in B_0} \alpha(b)$$

называют размером критерия, а функцию

$$M(b) \triangleq P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,|\, b \} ,$$

определяющую значение вероятности отклонения основной гипотезы H_0 в зависимости от значения параметра b, называют функцией мощности критерия.

<u>**Определение 6.**</u> Если существует критерий, который при заданном фиксированном размере α максимизирует функцию мощности $M(b)$ по всем возможным критериям при всех $b \in B_1$, то такой критерий называют равномерно наиболее мощным.

<u>**Замечание 6.**</u> В соответствии с определением функции мощности критерия, а так же определениями вероятностей совершения ошибок I-го и II-го рода имеем:

$$\alpha(b) = P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,|\, b \in B_0 \} = M(b)\big|_{b \in B_0} ;$$

$$\beta(b) = P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in \overline{W} \,|\, b \in B_1 \} = 1 - P\{ \overrightarrow{\xi_n(\omega)} \in W \,|\, b \in B_1 \} = \\ = 1 - M(b)\big|_{b \in B_1} .$$

Таким образом, в случае своего существования, равномерно наиболее мощный критерий при фиксированном размере α минимизирует вероятность совершения ошибки II-го рода $\forall b \in B_1$.

Пример 6. В примере 4 мы предполагали, что $\xi(\omega) \sim N(m,$ …
при известном σ^2 рассматривали задачу проверки …ных параметрических гипотез : $H_0 : m = m_0$; $H_1 : m = m_1$
Для критерия Неймана – Пирсона было определено критическое множество

$$W = \left\{ \overrightarrow{X_n} \in \mathcal{X}_n : \sum_{k=1}^{n} x_k \geqslant n m_0 + \sigma \sqrt{n}\, h_{1-\alpha} \right\},$$

которое не зависит от m_1. Таким образом, фактически исходная задача решена для сложной конкурирующей гипотезы $H_1 : m > m_0$, а построенный критерий является равномерно наиболее мощным.

Пример 7. В условиях примера 4 рассмотрим задачу проверки двух сложных параметрических гипотез

$$H_0 : m \leqslant m_0 \quad ; \quad H_1 : m \geqslant m_1 > m_0 .$$

Заметим, что для критерия, задаваемого критическим множеством W, представленным в примерах 4, 6, вероятность совершения ошибки I-го рода

$$\alpha(m) = P\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) \geqslant C \,\middle|\, H_0 \right\} = 1 - \Phi\left(\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}} \right)\Bigg|_{m \leqslant m_0} =$$
$$= 1 - \Phi\left(\frac{n m_0 + \sigma\sqrt{n}\, h_{1-\alpha} - nm}{\sigma\sqrt{n}} \right)\Bigg|_{m \leqslant m_0} =$$
$$= 1 - \Phi\left(h_{1-\alpha} + (m_0 - m)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)\Bigg|_{m \leqslant m_0} .$$

Таким образом размер критерия

$$\sup_{m \leqslant m_0} \alpha(m) = \alpha(m_0) = \alpha .$$

Вероятность совершения ошибки II-го рода (см. пример 4)

$$\beta(m) = P\left\{ \sum_{k=1}^{n} \xi_k(\omega) < C \,\middle|\, H_1 \right\} = \Phi\left(\frac{C - nm}{\sigma\sqrt{n}} \right)\Bigg|_{m \geqslant m_1 > m_0} =$$
$$= \Phi\left(h_{1-\alpha} - (m - m_0)\frac{\sqrt{n}}{\sigma} \right)\Bigg|_{m \geqslant m_1 > m_0} .$$

Рассуждая как и выше (пример 6) приходим к выводу, что рассмотренный критерий является равномерно наиболее мощным и для данной задачи.

Пример 8. Пусть $\overrightarrow{\xi_n(\omega)}$ и $\overrightarrow{\eta_N(\omega)}$ – случайные выборки для независимых случайных величин $\xi(\omega) \sim N(m_1, \sigma_1^2)$ и $\eta(\omega) \sim N(m_2, \sigma_2^2)$ соответственно, где σ_1^2 и σ_2^2 известны. Необходимо решить следующие задачи проверки статистических гипотез:

$$(1)\ \begin{array}{l} H_0 : m_1 = m_2 \\ H_1 : m_1 > m_2 \end{array} ; \quad (2)\ \begin{array}{l} H_0 : m_1 = m_2 \\ H_1 : m_1 \neq m_2 \end{array} ; \quad (3)\ \begin{array}{l} H_0 : m_1 = m_2 \\ H_1 : m_1 < m_2 \end{array} .$$

Для достижения поставленной цели удобно ввести в рассмотрение случайную величину

$$\zeta(\omega) \triangleq \xi(\omega) - \eta(\omega),$$

математическое ожидание которой

$$m \triangleq M[\zeta(\omega)] = M[\xi(\omega)] - M[\eta(\omega)] = m_1 - m_2 ,$$

что позволяет рассматриваемые задачи (1) – (3) представить в эквивалентном виде:

$$(1^*)\ \begin{array}{l} H_0 : m = 0 \\ H_1 : m > 0 \end{array} ; \quad (2^*)\ \begin{array}{l} H_0 : m = 0 \\ H_1 : m \neq 0 \end{array} ; \quad (3^*)\ \begin{array}{l} H_0 : m = 0 \\ H_1 : m < 0 \end{array} .$$

Считаем, что уровень α значимости критерия задан и воспользуемся статистикой

$$\varphi\left(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \overrightarrow{\eta_N(\omega)} \right) \triangleq \left(\overline{\xi(\omega)} - \overline{\eta(\omega)} \right) \Big/ \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n} + \frac{\sigma_2^2}{N}} ,$$

которая при истинности основной гипотезы $H_0 : m_1 = m_2$ имеет распределение $N(0,1)$ так как

$$M\left[\varphi\left(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \overrightarrow{\eta_N(\omega)}\right)\right] = \left(m_1 - m_2\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}} \equiv 0 ;$$

$$D\left[\varphi\left(\overrightarrow{\xi_n(\omega)}, \overrightarrow{\eta_N(\omega)}\right)\right] = D\left[\overline{\xi(\omega)} - \overline{\eta(\omega)}\right]\Big/\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}\right) = \left\{\begin{array}{l}\text{в силу неза-}\\ \text{висимости}\\ \xi(\omega) \text{ и } \eta(\omega)\end{array}\right\} :$$

$$= \left\{D\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)\right] + D\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\eta_k(\omega)\right]\right\}\Big/\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}\right) =$$

$$= \left\{\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{D\left[\xi_k(\omega)\right]}_{\sigma_1^2} + \frac{1}{N^2}\sum_{k=1}^{N}\underbrace{D\left[\eta_k(\omega)\right]}_{\sigma_2^2}\right\}\Big/\left(\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}\right) \equiv 1 .$$

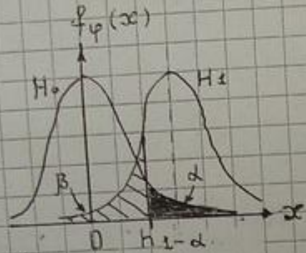


Рис1.

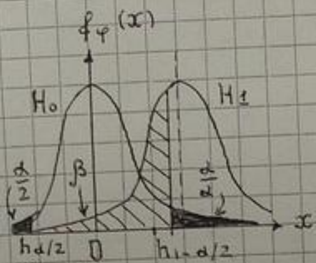


Рис2.

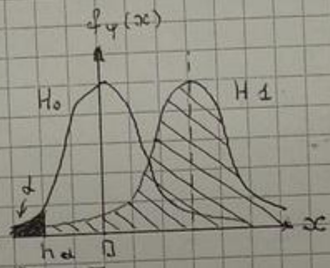


Рис. 3.

Непосредственно из рис. 1-3 видно, что для задачи (1*) при фиксированном уровне значимости критерия α вероятность совершения ошибки II-го рода β будет наименьшей для критического множества, соответствующего ситуации, представленной на рис.1, то есть

$$W = \left\{\begin{bmatrix}\vec{X}_n\\ \vec{Y}_N\end{bmatrix} : \left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}} \geq h_{1-\alpha}\right\} .$$

Рассуждая аналогичным образом приходим к выводу, что для задачи (2*) критическое множество должно быть симметричным – рис. 2:

$$W = \left\{\begin{bmatrix}\vec{X}_n\\ \vec{Y}_N\end{bmatrix} : \left|\overline{X}-\overline{Y}\right|\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}} \geq h_{1-\alpha/2}\right\} ,$$

а для задачи (3*) – левосторонним – рис. 3:

$$W = \left\{\begin{bmatrix}\vec{X}_n\\ \vec{Y}_N\end{bmatrix} : \left(\overline{X}-\overline{Y}\right)\Big/\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n}+\frac{\sigma_2^2}{N}} \leq h_{\alpha}\right\} .$$