



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методические указания
по выполнению домашних заданий по единому
комплексному заданию по блоку дисциплины

«Физика»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методические указания
по выполнению домашних заданий по единому
комплексному заданию по блоку дисциплины

«Физика»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973-018
И201

Методические указания по выполнению домашних заданий по единому
комплексному заданию по блоку дисциплины «Физика»
М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 19 с.: ил.

В методических указаниях рассмотрены основные этапы, их последовательность и содержание по выполнению домашних заданий по единому комплексному заданию по блоку дисциплины «Физика».

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012

АННОТАЦИЯ

В работе проведено практическое изучение физических законов, описывающих поступательное и вращательное движение тела или групп тел, на примере решения задач. В процессе решения проводилась иллюстрация в виде рисунков, на которых схематически были изображены механические силы, действующие на тело.

ANNOTATION

We conducted a practical study of the physical laws describing the translational and rotational motion of a body or group of bodies, an example of solving problems. In illustration of the solution was carried out in the form of drawings, which schematically depicted the mechanical forces acting on the body.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	6
1.ИЗУЧЕНИЯ.ПРИНЦИПОВ.РАСЧЕТА.ФИЗИЧЕСКИХ.ТЕЛ.ПО.ЗАКОНАМ.....	
СТАТИКИ И КИНЕМАТИКИ.....	7
ВЫВОДЫ.....	18
СПИСОК.ИСПОЛЬЗОВАННЫХ.ИСТОЧНИКОВ	19

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы – изучение на практике кинематических законов, с помощью которых можно описать движение физического тела движущегося прямолинейно поступательно и /или вращательно, на последнем этапе домашнего задания проводится расчет физического комплекса тел, которые взаимодействуют друг с другом.

1 ИЗУЧЕНИЯ ПРИНЦИПОВ РАСЧЕТА ФИЗИЧЕСКИХ ТЕЛ ПО ЗАКОНАМ СТАТИКИ И КИНЕМАТИКИ

Дано:

$m = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; v_0 = 6 \text{ м/с}$

$U = 4 \text{ м/с}, \beta = 180^\circ$

$\eta = 25\%, \text{ НЧУ}$

Найти:

$\alpha_k - ?; \Delta \vec{v} - ?; \Delta E - ?;$

$I \Delta \vec{p} - ?; F \Delta t - ?$

$\vec{U}$ - вектор скорости подвижной стенки (скорость подвижной инерциальной системы отсчета (ИСО))

$\vec{v}_k$ - вектор конечной абсолютной скорости частицы

$\vec{v}_k'$ - вектор конечной скорости частицы относительно подвижной стенки.

Угол $\alpha_k = 0$.

Так как удар частицы о стенку неупругий, то будет выполняться закон сохранения механической энергии:

Энергия: $\frac{m v_0'^2}{2} = \frac{m v_k'^2}{2} + \eta \cdot \frac{m v_0^2}{2} \quad (3)$

Подставим в (3) v_0' из (1); получим:

$(v_0 + U)^2 = v_k'^2 + \eta v_0^2; \quad v_k'^2 = (v_0 + U)^2 - \eta v_0^2;$

$v_k'^2 = v_0^2(1 - \eta) + 2 v_0 U + U^2;$

$v_k' = \sqrt{v_0^2(1 - \eta) + 2 v_0 U + U^2}.$

$v_k' = \sqrt{6^2(1 - 0,25) + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 4^2} = \sqrt{73} = 8,54 \text{ м/с}.$

Или, по (2): $v_k = U - v_k';$

$v_k = 4 - 8,54 = -4,54 \text{ м/с}.$

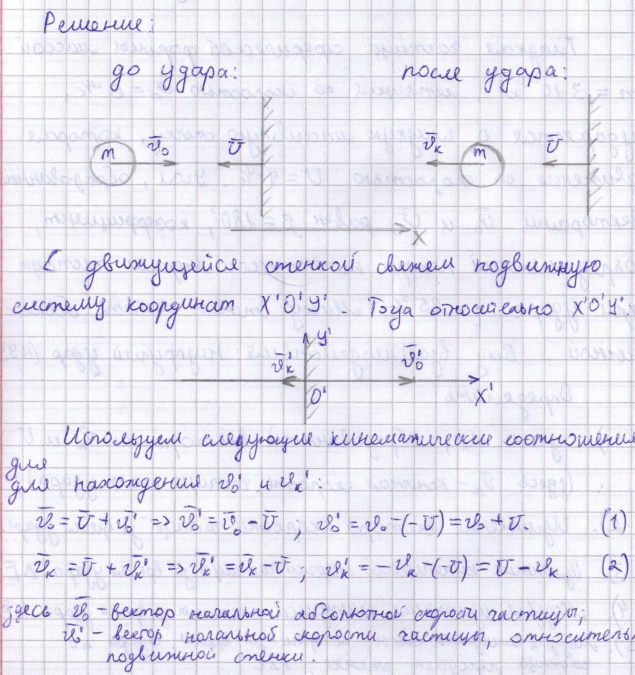
И $\Delta \vec{v} = v_k - v_0 = -4,54 - 6 = -10,54$ - изменение скорости частицы.

Изменение энергии частицы:

$\Delta E = E_k - E_0 = \frac{m v_k^2}{2} - \frac{m v_0^2}{2} = \frac{m}{2} (v_k^2 - v_0^2)$

здесь E_0 - энергия (кинетическая) частицы до удара

E_k - энергия частицы после удара о стенку.



Домашнее задание
по курсу общей физики.

1-й курс, 2-й семестр.

Группа: ИУ7-21

Вариант: № 18.

Фамилия: Бугренко П.В.

Задача: № 2-3

Жесткий стержень длиной $l = 0,5$ м и массой $M = 1$ кг может свободно без трения вращаться вокруг горизонтальной оси O . При прохождении стержнем вертикального положения с угловой скоростью ω_0 , он своим нижним концом ударяет по кубику массой $m = 0,1$ кг, который движется после удара в плоскости рисунка.

Определить:

ω_{0m} - минимальную угловую скорость, при которой стержень после удара совершит полный оборот вокруг оси O при неупругом ударе (НУУ);

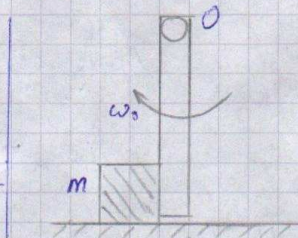
φ_m - максимальный угол отклонения стержня от положения равновесия после удара;

ΔE - потеря механической энергии при ударе стержня по кубику.

Дано:

$\omega_0 = 0,5 \omega_{0m}$; $V_0 = \omega_0 l$ (V_0 - скорость кубика после удара); НУУ.

Найти: $\omega_{0m} = ?$ $\varphi_m = ?$ $\Delta E = ?$



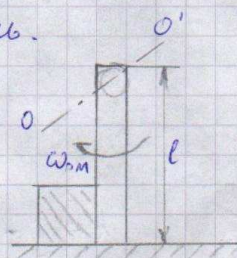
Решение:

Решение данной задачи целесообразно разбить на 2

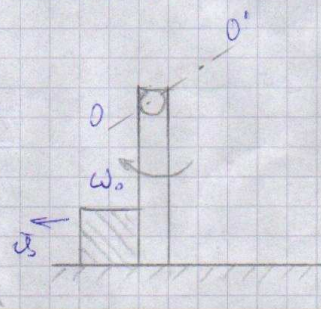
части: I. Вычисление ω_{0m} ;
II. Вычисление всех остальных величин.

I Часть.

до удара:



Непосредственно после удара.



Запишем закон сохранения момента импульса:

$$-J_{\text{ст}} \omega_{0\text{м}} = -m v_0 l - J_{\text{ст}} \omega_0 \quad (1)$$

при совершении стержнем полного оборота:

C - центр масс стержня.

$$J_{\text{ст}} \frac{\omega_0^2}{2} = M g l \quad (2)$$

$$v_0 = \omega_0 l - \text{скорость кубика после удара} \quad (3)$$

по теореме Гюйгенса-Штейнера:

$$J_{\text{ст}} = \frac{1}{12} M l^2 + M \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M l^2 + \frac{M l^2}{4} = \frac{M l^2}{12} + \frac{3 M l^2}{12} = \frac{4 M l^2}{12} = \frac{M l^2}{3} \quad (4)$$

Составим из (1), (2) и (3) систему:

$$\begin{cases} J_{\text{ст}} \omega_{0\text{м}} = m v_0 l + J_{\text{ст}} \omega_0 \\ J_{\text{ст}} \frac{\omega_0^2}{2} = M g l \\ v_0 = \omega_0 l \end{cases} \Rightarrow \omega_{0\text{м}} = \frac{m \omega_0 l + J_{\text{ст}} \omega_0}{J_{\text{ст}}} =$$

$$= \left\{ \text{с учетом (2)} \right\} = \frac{m \omega_0 l + \frac{M l^2 \omega_0}{3}}{\frac{M l^2}{3}} = \frac{3 \cdot m \omega_0 l + M l^2 \omega_0}{M l^2} =$$

$$= \frac{l \omega_0 (3m + M l)}{M l^2} = \frac{\sqrt{6 g (3m + M l)}}{\sqrt{2} M l} = \frac{\sqrt{6 \cdot 9,8 (3 \cdot 0,3 + 1 \cdot 0,5)}}{M l^2}$$

получили:

$$\omega_{0\text{м}} = \frac{\sqrt{6 g l (3m + M l)}}{M l^2}$$

Проведем вычисления.

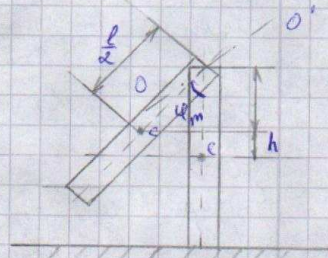
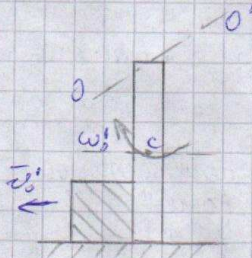
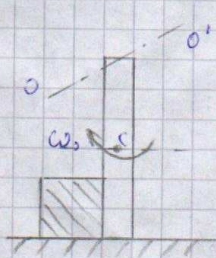
$$\omega_{0\text{м}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 9,8 \cdot 0,5 \cdot (0,3 + 1 \cdot 0,5)}}{0,5^2} = 17,351 \text{ рад/с.}$$

II часть. Рассмотрим движение стержня:

до удара:

немедленно
после удара:

максимальное отклонение от
положения равновесия после удара:



$$h = \frac{l}{2} - \frac{l}{2} \cdot \cos \varphi_m = \frac{l}{2} (1 - \cos \varphi_m)$$

$$J_{cm} \frac{(\omega_0')^2}{2} = Mgh = \frac{l}{2} g M (1 - \cos \varphi_m)$$

$$\Rightarrow J_{cm} (\omega_0')^2 = l g M (1 - \cos \varphi_m) \Rightarrow 1 - \cos \varphi_m = \frac{J_{cm} (\omega_0')^2}{l g M} =$$

$$= \text{т.к. } J_{cm} = \frac{M l^2}{3} \Rightarrow \frac{M l^2 (\omega_0')^2}{3} = \frac{l g M (1 - \cos \varphi_m)}{3} \Rightarrow \frac{l (\omega_0')^2}{3} = \frac{l g M (1 - \cos \varphi_m)}{3 g M}$$

$$(5) \quad \Rightarrow \cos \varphi = 1 - \frac{l (\omega_0')^2}{3 g}$$

ω_0' — угловая скорость стержня после удара; ω_0 — до удара;
 ω_0' выразим через (1), записанного как:

$$J_{cr} \omega_0 = m v_0' l + J_{cm} \omega_0' \Rightarrow J_{cm} \omega_0' = J_{cm} \omega_0 - m v_0' l$$

$$\text{т.к. } v_0' = \omega_0 l, J_{cm} = \frac{M l^2}{3}, \text{ то:}$$

$$\frac{M l^2}{3} \omega_0' = \frac{M l^2}{3} \omega_0 - m \omega_0 l^2;$$

$$\frac{M l^2}{3} \omega_0' = \frac{\omega_0 l^2 (M - 3m)}{3};$$

$$(6) \quad \omega_0' = \frac{\omega_0 (M - 3m)}{M}$$

подставим (6) в (5):

$$\cos \varphi = 1 - \frac{l \omega_0^2 (M - 3m)^2}{3 g M^2}$$

Найдем потерю энергии стержня ΔE .

Запишем закон сохранения при ударе:

$$J_{cm} \frac{\omega_0^2}{2} = \frac{m v_0'^2}{2} + J_{cm} \frac{\omega_0'^2}{2} + \Delta E$$

с учетом (3), (4), (6):

$$\Delta E = \frac{M l^2 \omega_0^2}{6} - \frac{m \omega_0^2 l^2}{2} - \frac{M l^2}{6} \cdot \frac{\omega_0^2 (M - 3m)^2}{M^2} =$$

$$= \frac{l \omega_0^2 [M^2 l \omega_0 - 3m M - l \omega_0 (M - 3m)^2]}{6 M}$$



Домашнее задание
по курсу общей физики.

1-й курс, 2-й семестр

Группа: ИУ7-21

Фамилия: Руденко П.В.

Вариант: № 18

Задача: № 3-1.

Колебательная система (КС) состоит из шайбы массой m и двух упругих пружин, имеющих жесткости k_1 и k_2 , соединенных последовательно. Массой пружин можно пренебречь. КС имеет вертикальное расположение в поле силы тяжести. l_{10} и l_{20} — длины 1-ой и 2-ой пружин в недеформированном состоянии; L — общая длина двух пружин в деформированном состоянии; $\vec{V}$ — вектор начальной скорости шайбы. Шайбу, находящуюся в положении равновесия, смещают до расстояния L , а затем импульсом придают ей в начальный момент времени $t=0$ скорость $\vec{V}$. В результате КС приходит в колебательное движение.

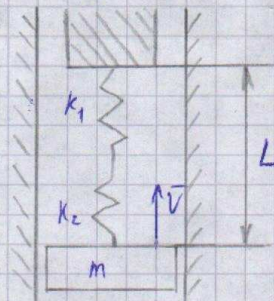
Дано:

$$\gamma = 0,1 \text{ кг/с}; \quad k_1 = 18 \text{ Н/м}; \quad k_2 = 16 \text{ Н/м}$$

$$m = 0,1 \text{ кг}; \quad l_{10} = l_{20} = 0,4 \text{ м}; \quad L = 0,78 \text{ м};$$

$$V = 0,1 \text{ м/с}.$$

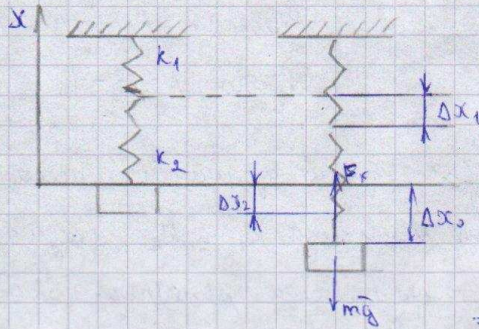
Найти:



1. Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -\gamma \vec{v}$, где γ — коэффициент сопротивления;
2. Круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатух. колебаний.
3. Круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
4. Логарифмический декремент затухания.
5. Начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
6. Записать с учетом найденных значений уравнение колебаний.

Решение.

Посмотрим, чему равно k_0 - общая жесткость пружин с жесткостями k_1 и k_2 , соединенных последовательно.



Общее смещение $\Delta x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2$

Сила натяжения пружин:

$$F_y = k_1 \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{F_y}{k_1}$$

$$F_y = k_2 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{F_y}{k_2}$$

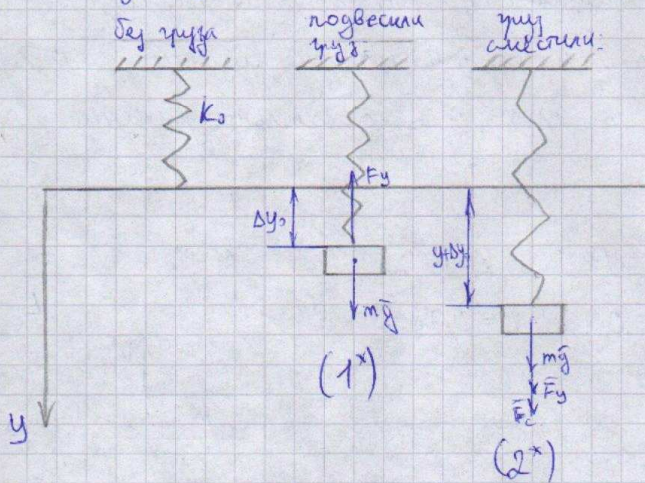
$$F_y = k_0 \Delta x_0 = k_0 (\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$\Rightarrow F_y = \frac{k_0 F_y}{k_1} + \frac{k_0 F_y}{k_2} \Rightarrow 1 = \frac{k_0}{k_1} + \frac{k_0}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2} \Rightarrow k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

(1)

б) Введем дифференциальные уравнения свободных затухающих колебаний



F_c - сила сопротивления движению mc ;

$$F_c = -r v = -r \frac{dy}{dt}$$

F_y - сила натяжения пружины:

$$F_y = -k_0 y$$

Запишем II-й закон Ньютона для:

а) уравновешенной системы (1*):

$$0 = mg - \Delta y_0 k_0 \Rightarrow \Delta y_0 k_0 = mg \quad (2)$$

б) для колеблющейся системы (2*):

$$\frac{m d^2 y}{dt^2} = -r \frac{dy}{dt} - k_0 (y + \Delta y_0) + mg$$

$$\frac{m d^2 y}{dt^2} = -r \frac{dy}{dt} - k_0 y - k_0 \Delta y_0 + mg \quad \text{с учетом (2):}$$

получим: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k_0}{m} y = 0$, или:

$$\left[\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \frac{k_0}{m} y = 0 \right]$$

- дифференциальное уравнение колебаний.

где $\delta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания.

Руденко Л.В., задача № 3-1
(продолжение)

- ②. Определим ω_0 и T_0 (круговую частоту и период свободных незатухающих колебаний).

из дифференциального уравнения (3):

$$\omega_0^2 = \frac{k_0}{m} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k_0}{m}}$$

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k_0}} \quad \text{произведем расчеты:}$$

$$k_0 = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2} = \frac{18 \cdot 16}{18 + 16} = 8,47 \text{ Н/м (см. (1))}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{8,47}{0,1}} = 9,2 \text{ рад/с}; \quad T_0 = 2\pi \cdot \frac{1}{9,2} = 0,6824 \text{ с.}$$

- ③. Определим ω и T (круговую частоту и период свободных затухающих колебаний)

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}; \quad \beta = \frac{r}{2m} \text{ (коэффициент затух.)}; \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\beta = \frac{0,1}{2 \cdot 0,1} = 0,5 \text{ с}^{-1};$$

$$\omega = \sqrt{9,2^2 - 0,5^2} = \sqrt{84,39} = 9,186 \text{ рад/с}$$

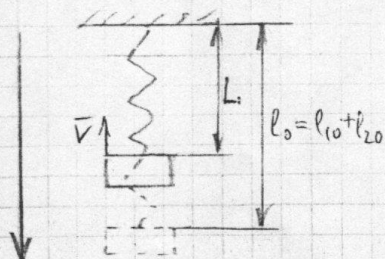
$$T = \frac{2\pi \cdot 14}{9,186} = 0,684 \text{ с.}$$

- ④. Вычислим логарифмический декремент затухания.

$$\delta = \beta \cdot T$$

$$\delta = 0,5 \cdot 0,684 = 0,342$$

- ⑤. Определим начальную амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
В начальный момент времени $t=0$:



$\Delta y_0 = L - (l_{10} + l_{20})$ - начальное смещение;

v - начальная скорость; т.о.

$$A_0 = \sqrt{\Delta y_0^2 + \left(\frac{v}{\omega_0}\right)^2}; \quad \text{tg } \varphi_0 = -\frac{v}{\Delta y_0 \cdot \omega_0} = \frac{v}{\Delta y_0 \cdot \omega_0}$$

$$A_0 = \sqrt{(0,78 - 0,8)^2 + \left(\frac{0,1}{9,2}\right)^2} = \sqrt{5,18 \cdot 10^{-4}} = 0,0228 \text{ м}$$

$$\text{tg } \varphi_0 = \frac{0,1}{9,2 \cdot (0,78 - 0,8)} = -0,5435,$$

$$\varphi_0 = \arctg(-0,5435) = -18^\circ 52'$$

мм, в радианах: $\varphi_0 = -0,5$.

6) Запишем уравнение колебаний.

Решением диф. ур-е $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \frac{k_0}{m} y = 0$

будет: $y = A_0 \cdot e^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi_0)$. (4).

Подставим в (4) полученные выше данные:

$$y = 0,023 \cdot e^{-0,5t} \cdot \cos(9,186 \cdot t - 0,5).$$

Ответ: 1) дифференциальное уравнение:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{dy}{dt} + 84,7 y = 0.$$

2). $\omega_0 = 9,2 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $T_0 = 0,6824 \text{ с}$,

3). $\omega = 9,186 \frac{\text{рад}}{\text{с}}$; $T = 0,684 \text{ с}$;

4) $\delta = 0,342$;

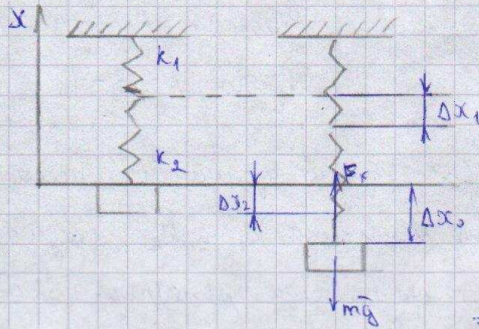
5). $A_0 = 0,023$, $\varphi_0 = -0,5$.

6). уравнение колебания:

$$y = 0,023 \cdot e^{-0,5t} \cdot \cos(9,186 \cdot t - 0,5).$$

Решение.

Посмотрим, чему равно k_0 - общая жесткость пружин с жесткостями k_1 и k_2 , соединенных последовательно:



Общее смещение: $\Delta x_0 = \Delta x_1 + \Delta x_2$

Сила натяжения пружин:

$$F_y = k_1 \Delta x_1 \Rightarrow \Delta x_1 = \frac{F_y}{k_1}$$

$$F_y = k_2 \Delta x_2 \Rightarrow \Delta x_2 = \frac{F_y}{k_2}$$

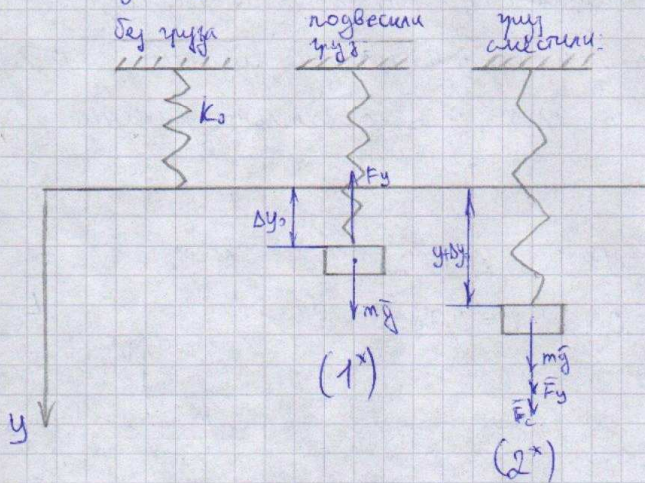
$$F_y = k_0 \Delta x_0 = k_0 (\Delta x_1 + \Delta x_2)$$

$$\Rightarrow F_y = \frac{k_0 F_y}{k_1} + \frac{k_0 F_y}{k_2} \Rightarrow 1 = \frac{k_0}{k_1} + \frac{k_0}{k_2}$$

$$\frac{1}{k_0} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_2 + k_1}{k_1 k_2} \Rightarrow k_0 = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

(1)

б) Выведем дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний



F_c - сила сопротивления движению mc ;

$$F_c = -r v = -r \frac{dy}{dt}$$

F_y - сила натяжения пружины:

$$F_y = -k_0 y$$

Запишем II-й закон Ньютона для:

а) уравновешенной системы (1*):

$$0 = mg - \Delta y_0 k_0 \Rightarrow \Delta y_0 k_0 = mg \quad (2)$$

б) для колеблющейся системы (2*):

$$\frac{m d^2 y}{dt^2} = -r \frac{dy}{dt} - k_0 (y + \Delta y_0) + mg$$

$$\frac{m d^2 y}{dt^2} = -r \frac{dy}{dt} - k_0 y - k_0 \Delta y_0 + mg \quad \text{с учетом (2):}$$

получим: $\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{r}{m} \frac{dy}{dt} + \frac{k_0}{m} y = 0$, или:

$$\left[\frac{d^2 y}{dt^2} + 2\beta \frac{dy}{dt} + \frac{k_0}{m} y = 0 \right]$$

- дифференциальное уравнение колебаний.

где $\delta = \frac{r}{2m}$ - коэффициент затухания.

Домашнее задание
по курсу общей физики

1-й курс, 2-й семестр

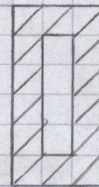
Группа ИЧГ-21

Фамилия Гудзенко П.В.

Вариант N 18

Задача N 4-3.

Для прямого вертикального волновода (трубы) длиной L , расположенного в воде, как указано на рисунке (волновод имеет жесткие пластины с обоих концов), необходимо:



- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в волноводе, при которых в нем образуется стоячая волна;
- 2) указать, какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам («высшим гармоникам»);
- 3) определить частоту и длину волны 2-й гармоники;
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль волновода качественную картину:
 - а) стоячей волны амплитуд смещений;
 - б) стоячей волны амплитуд давлений.

Дано:

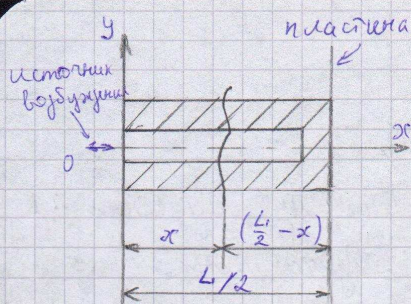
скорость звука в воде: $c_1 = 1500 \text{ м/с}$;

среда: внутри — вода; снаружи — вода;

длина волновода $L = 3 \text{ м}$.

Решение:

1. Середина трубы перемещаться не может, т.к. зажата между двумя неподвижными пластинами, поэтому в этом сечении существует узел перемещений. Систему можно разбить на 2 независимые части и рассматривать возникновение в каждой из них симметрических относительно пластин стоячих волн.



Длина λ продольной волны в упругой среде (воде) с учетом скорости продольных волн c_1 и частоты ν :

$$\lambda = \frac{v}{\nu} \Rightarrow \lambda = \frac{c_1}{\nu} \quad (1)$$

2. Волновое число k продольной волны с учетом (1):

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \Rightarrow k = \frac{2\pi\nu}{c_1} \quad (2)$$

3. Уравнение бегущей волны в текущем сечении трубы с координатой x с учетом текущего смещения ξ_1 , амплитуды смещения A , угловой частоты ω и текущего времени t : $\xi_1 = A \cdot \cos(\omega t - kx)$. (3)

4. От сечения с текущей координатой x волна пройдет расстояние $(\frac{L}{2} - x)$ до пластины, отразится от стенки с изменением фазы на π , поскольку отражается от более плотной среды, чем вода, а затем вернется в сечение x , пройдя второе расстояние $(\frac{L}{2} - x)$. Уравнение отраженной волны с учетом двойного расстояния $2 \cdot (\frac{L}{2} - x)$ и поворота фазы на π :

$$\begin{aligned} \xi_2 &= A \cdot \cos\left[\omega t - k\left[x + 2\left(\frac{L}{2} - x\right)\right] + \pi\right] \Rightarrow \\ \xi_2 &= -A \cdot \cos\left[\omega t - k\left(2 \cdot \frac{L}{2} - x\right)\right] \end{aligned} \quad (4)$$

5. Складываем (3) и (4) и получаем уравнение смещения ξ в сечении x :

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_1 + \xi_2 = A \cdot \cos(\omega t - kx) - A \left[\cos(\omega t - k(2 \cdot \frac{L}{2} - x)) \right] \Rightarrow \\ \xi &= -2A \cdot \sin k(\frac{L}{2} - x) \cdot \sin(\omega t - k \frac{L}{2}). \end{aligned} \quad (5)$$

6. На левом конце трубы амплитуда стоячей волны максимальна и равна $2A$. С учетом $x=0$, (2), (5):

$$2A \sin(k \cdot \frac{L}{2}) = 2A \Rightarrow \sin(k \cdot \frac{L}{2}) = 1 \Rightarrow \frac{2\pi\nu}{c_1} \cdot \frac{L}{2} = (2n+1) \cdot \frac{\pi}{2}; \quad \boxed{\frac{\nu L}{c_1} = \frac{2n+1}{2}} \quad (6)$$

($n=0, 1, 2, 3, \dots$)

Рудякко П.В., задача № 4-3
(продолжение)

7. На первой или основной частоте $\underline{n=0}$, с учетом (6):

(7).
$$\nu_1 = \frac{c_1}{2L}.$$

при $n=1, 2, 3, \dots \Rightarrow$ обертоны (высшие гармоники).

8. Длина волны λ_1 на основной частоте ν_1 , с учетом (1) и (7):

(8).
$$\lambda_1 = \frac{c_1}{\nu_1} \rightarrow \lambda_1 = 2L.$$

9. Частота ν_i и длина волны λ_i i -ой гармоники с учетом (1) и (6):

$$\nu_i = (2 \cdot [i-1] + 1) \cdot \frac{c_1}{2L}; \quad \lambda_i = \frac{2L}{2[i-1] + 1}, \quad \text{или:}$$

$$\nu_i = (2i-1) \cdot \frac{c_1}{2L}; \quad \lambda_i = \frac{2L}{2i-1}.$$

Определим 2-ю гармонику:

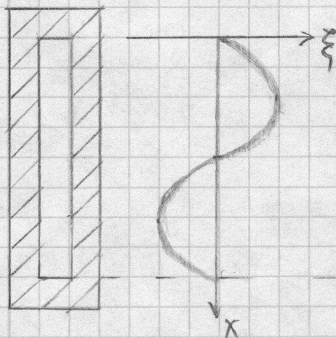
$$\nu_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{c_1}{L}; \quad \lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot L.$$

$$\nu_2 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1500}{3} = 750 \quad \left(\frac{1}{c}\right)$$

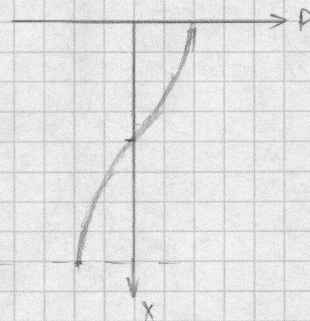
$$\lambda_2 = \frac{2}{3} \cdot 3 = 2 \quad (\text{м}).$$

10. Качественные картины для 2-й гармоники:

а). стоячей волны
амплитуд смещений



б). стоячей волны
амплитуд давлений



$p = \frac{\partial p}{\partial x}$ - деформации

ВЫВОДЫ

В ходе работы были изучены на практике кинематические законов, с помощью которых можно описать движение физического тела движущегося прямолинейно поступательно и /или вращательно, на последнем этапе домашнего задания проводится расчет физического комплекса тел, которые взаимодействуют друг с другом.

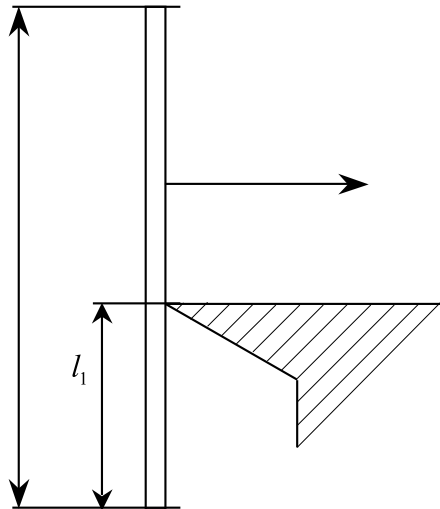
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Вайскопф В. Наука и удивительное (как человек понимает природу). - М.: Наука, 1965.
2. Готт В. С. Философские вопросы современной физики. - М.: Высшая школа, 1988.
3. Зельдович Я.Б., Хлопов М.Ю. Драма идей в познании природы.- М.: Наука, 1988.
4. Капица П. Л. Эксперимент. Теория. Практика. - М.: Наука, 1977.

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 9 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l , движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0 , налетает на край массивной преграды. После удара стержень вращается вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{ м}, \quad l_1 = 0.2l, \quad V_0 = 1\text{ м/с}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$.

Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потерциальной энергии уровень, на котором находится ось O . Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_{\text{п}} = \frac{mgl}{2} - mgl_1.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mgl_1 = \frac{I\omega_{\text{к}}^2}{2}.$$

Тогда:

$$\omega_{\text{к}} = \sqrt{\frac{I\omega_0^2 + mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

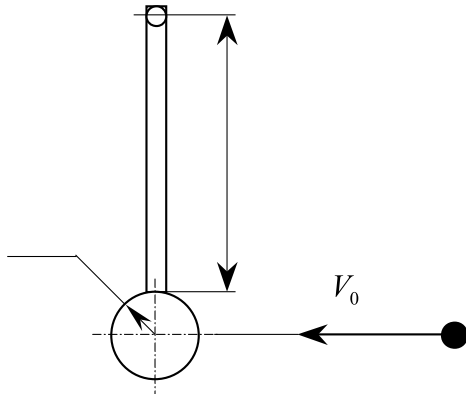
Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{V_0}{\frac{l}{2} - l_1} = \frac{10}{3} \approx 3.33\text{ с}^{-1}, \\ \omega_{\text{к}} = \sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)\omega_0^2 + gl - 2gl_1}{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)}} \approx 6.713\text{ с}^{-1}. \end{cases}, \text{ где } r = \frac{l}{2} - l_1$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 26 вариант

Задача 2-3

Условие



Физический маятник, состоящий из шара радиусом R и массой M , жестко прикрепленного к тонкому стержню длиной $4R$ и массой M , подвешен к горизонтальной оси O , проходящей через конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка. Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси O . Шарик массы m движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью $\vec{V}_0$ вдоль прямо, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником происходит в виде абсолютно неупругого удара.

$$\begin{aligned} R &= 3\text{см}, \\ M &= 1\text{кг}, \\ m &= 0.1\text{кг}, \\ V_0 &= 0.5V_{0m}. \end{aligned}$$

Вычислить:

$$\varphi_m; \quad V_{0m}; \quad \Delta E.$$

Момент инерции системы с шариком (шарик считается материальной точкой):

$$I = I + 25mR^2 = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень, на котором находится ось вращения. Найдём энергию системы в начальном состоянии, состоянии максимального подъёма и состоянии отклонения на угол φ :

$$\begin{cases} E_{п0} = -2MgR - 5MgR - 5mgr = -(7M + 5m)gR. \\ E_{п1} = 2MgR + 5MgR + 5mgr = (7M + 5m)gR. \\ E_{п\varphi} = (-2MgR - 5MgR - 5mgr) \cos \varphi = -(7M + 5m)gR \cos \varphi \end{cases}$$

Кинетическая энергия системы сразу после столкновения: $E_{к1} = \frac{I\omega_0^2}{2}$

Найдём ω_m . По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_m^2}{2} - (7M + 5m)gR = (7M + 5m)gR \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{4(7M + 5m)gR}{I}}.$$

При соударении выполняется закон сохранения момента импульса:

$$I\omega_0 = 5mV_0R. \Rightarrow \omega_0 = \frac{5mV_0R}{I}; \quad V_{0m} = \frac{I\omega_m}{5mR} = \sqrt{\frac{4Ig(7M + 5m)}{25m^2R}}; \omega_0 = \sqrt{\frac{(7M + 5m)gR}{I}}.$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемого случая:

$$\frac{mV_0^2}{2} + \Delta E = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I}$$

Найдём φ_m :

$$\frac{I\omega_0^2}{2} - (7M + 5m)gR = -(7M + 5m)gR \cos \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \arccos \left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M + 5m)} \right).$$

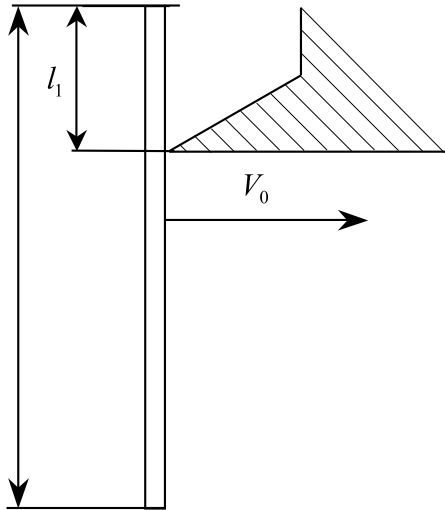
Запишем полученные результаты:

$$\begin{cases} I = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2, \\ V_{0m} = \sqrt{\frac{4Ig(7M+5m)}{25m^2R}} \approx 32.131\text{м/с}, \\ \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I} \approx 11.801\text{Дж}, \\ \varphi_m = \arccos \left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M+5m)} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 14 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l , движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0 , налетает на край массивной преграды. После удара стержень вращается вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{ м}, \quad l_1 = 0.2l, \quad V_0 = 0.4V_{0m}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$.

Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потерциальной энергии уровень, на котором находится ось O . Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_{\pi} = \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1).$$

Положим ω_{0m} - минимальная начальная угловая скорость, при которой возможно второе соударение. Тогда:

$$\frac{I\omega_{0m}^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) = 0.$$

Из полученного соотношения выразим ω_{0m} :

$$\omega_{0m} = \sqrt{\frac{mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

Так как $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$, то $V_{0m} = r\omega_{0m}$.

Когда стержень повернут на угол φ , его потенциальная энергия равна

$$E_{\pi} = \left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) \right) \cdot \cos \varphi.$$

Найдем φ_m :

$$\left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) \right) \cdot (\cos \varphi_m - 1) = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \varphi_m = \arccos \left(1 + \frac{I\omega_0^2}{mgl - 2mg(l - l_1)} \right)$$

Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} V_{0m} = r \sqrt{\frac{gl - 2gl_1}{\frac{l^2}{12} + r^2}} \approx 1.748 \text{ м/с}, \\ \omega_0 = \frac{0.4 \cdot V_{0m}}{r} \approx 2.331 \text{ с}^{-1}, \\ \varphi_m = \arccos \left(1 + \frac{\omega_0^2 \left(\frac{l^2}{12} + r^2 \right)}{2gl_1 - gl} \right) \approx 0.574. \end{cases}, \text{ где } r = \frac{l}{2} - l_1$$

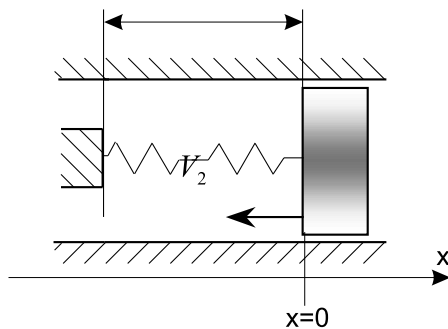
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 9 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:

$$\begin{aligned} r &= 0.3 \text{ кг/с}, \\ k_1 &= 10 \text{ Н/м}, \\ k_2 &= 12 \text{ Н/м}, \\ m &= 0.14 \text{ кг}, \\ l_{10} &= l_{20} = 0.11 \text{ м}, \\ L &= 0.23 \text{ м}, \\ V_2 &= 0.03 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Две последовательно соединенные пружины с коэффициентами k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Последовательно вычислим искомые величины:

- 1) По Второму Закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x :

$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

- 2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение:

$$-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 6.242 \text{ с}^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1.007 \text{ с}$.

$$3) \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 6.242 \text{ с}^{-1}, \text{ где } \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 1.022 \text{ с}$$

$$4) \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.933 \text{ с}$$

$$5) \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}, \text{ где } x_0 = L - (l_{10} + l_{20}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_2^2} \approx 0.011 \text{ м};$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 0.448.$$

- 6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$.

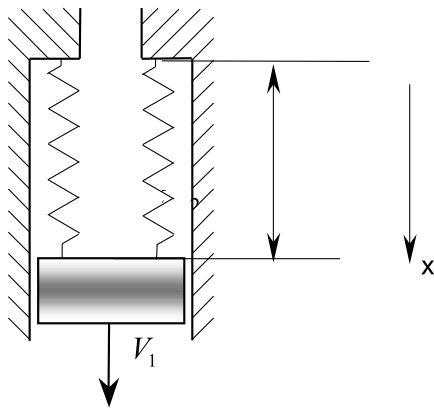
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 14 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:

$$\begin{aligned} r &= 0.3 \text{ кг/с}, \\ k_1 &= 20 \text{ Н/м}, \\ k_2 &= 18 \text{ Н/м}, \\ m &= 0.08 \text{ кг}, \\ l_{10} &= l_{20} = 0.1 \text{ м}, \\ L &= 0.16 \text{ м}, \\ V_1 &= 0.08 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Две параллельные пружины с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = k_1 + k_2$.

Примем за точку с $x = 0$ точку, в которой все силы, действующие на тело скомпенсированы. x_0 - точка, в которой пружина находится в нерастянутом положении. В точке $x = 0$ выполняется соотношение $mg = -kx_0$. Отсюда $x_0 = -\frac{mg}{k}$. В произвольной точке x сумма сил упругости и тяжести: $F = mg - k(x_1 - x_0) = mg - mg - kx = -kx$. То есть можно заменить исходную пружину пружиной с такой же жесткостью и с недеформированным положением в точке $x_0 = -\frac{mg}{k}$. Последовательно вычислим искомые величины:

- 1) По Второму Закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x :

$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

- 2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение: $-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 21.794 \text{ с}^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0.288 \text{ с}$.
- 3) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 21.714 \text{ с}^{-1}$, где $\beta = \frac{r}{2m}$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 0.289 \text{ с}$
- 4) $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.533 \text{ с}$
- 5) $\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_1^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}$, где $x_0 = L - (l_{10} + \frac{mg}{k}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_1^2} \approx 0.04 \text{ м}$;
 $\varphi = \arcsin\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 1.478$.
- 6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$.

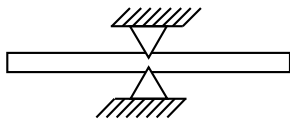
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 9 вариант

Задача 4-1

Условие

Для стержня длиной L , закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
- 2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
- 3) определить частоту и длину волны i -ой гармоники,
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и деформаций.



Материал: алюминий,
 $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$,
 $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $L = 1.2 \text{ м}$,
 $i = 3$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

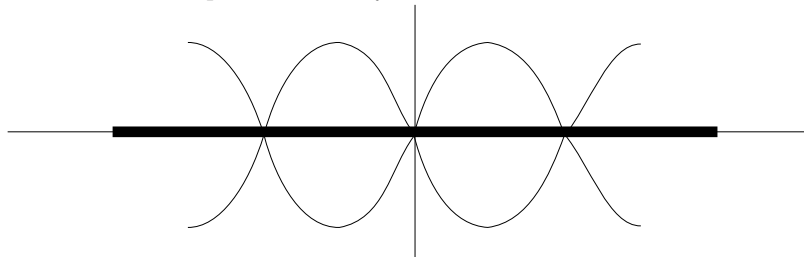
$$\xi = A \cos(\omega t + \varphi_1) \cos(kx + \varphi_2)$$

Для данного типа крепления на длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{2L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$. Скорость распространения волн в твердом веществе: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Найдем последовательно искомые величины:

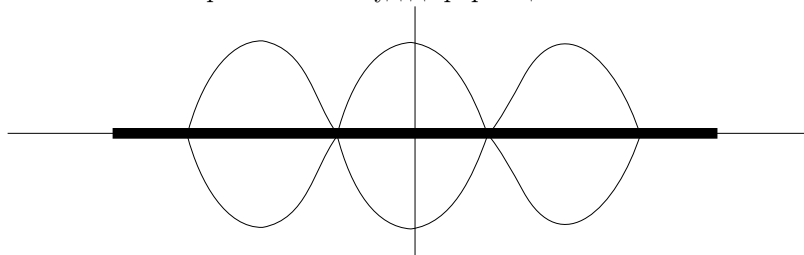
- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i \in \mathbb{N}$$

- 2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.215 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
- 3) Частота i -ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 1.265 \cdot 10^6 \text{ Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{2L}{i} \approx 0.8 \text{ м}$.
- 4) Качественная картина амплитуд смещений:



- 5) Качественная картина амплитуд деформаций:



Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 14 вариант

Задача 4-1

Условие

Для волновода длиной L , закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
- 2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
- 3) определить частоту и длину волны i -ой гармоники,
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и давлений.



Среда: воздух,
 $c = 340 \text{ м/с}$,
 $L = 1.7 \text{ м}$,
 $i = 1$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

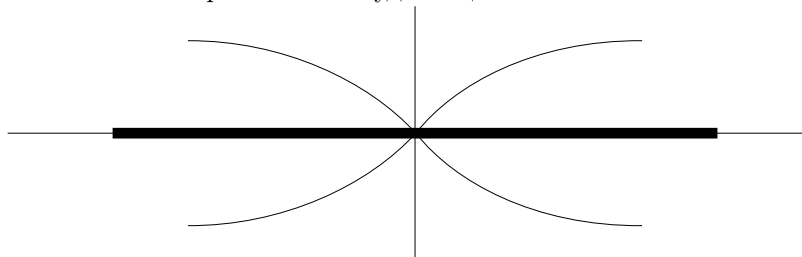
$$\xi = A \cos(\omega t + \widetilde{\varphi}_1) \cos(kx + \widetilde{\varphi}_2)$$

На длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$. Найдем последовательно искомые величины:

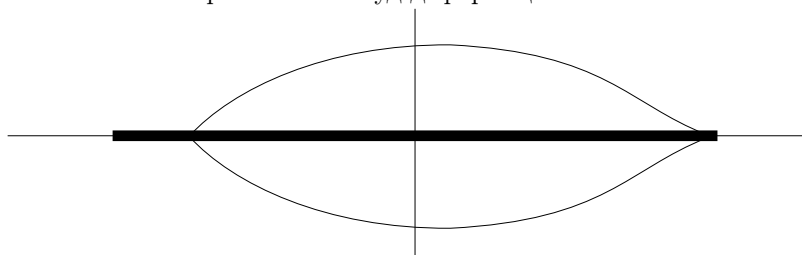
- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{2\pi c i}{L}, \quad i \in \mathbb{N}$$

- 2) Частота $\omega_0 = \frac{2\pi c}{L} \approx 1.257 \cdot 10^3 \text{ Гц}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
- 3) Частота i -ой гармоники: $\omega_i = \frac{2\pi c i}{L} \approx 1.257 \cdot 10^3 \text{ Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{L}{i} \approx 1.7 \text{ м}$.
- 4) Качественная картина амплитуд смещений:



- 5) Качественная картина амплитуд деформаций:

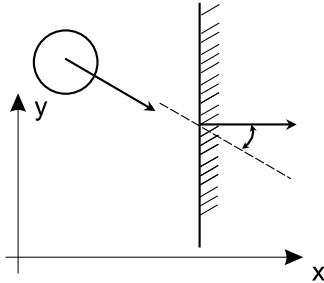


Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 1-2

Условие

Гладкая частица сферической формы массы m , летящая со скоростью $\vec{V}_0$, ударяется о гладкую массивную стенку, которая движется со скоростью $\vec{U}$. Угол, образованный векторами $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$ равен β . Массу стенки считать бесконечной.



$$m = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; \quad V_0 = 12 \text{ м/с}; \quad U = 2 \text{ м/с}; \quad \beta = \frac{\pi}{4}; \quad \Delta t = 2 \cdot 10^{-5} \text{ с}.$$

Вид удара: **абсолютно упругий**.

Требуется определить следующие величины:

$$a_K; |\Delta \vec{V}|; \Delta E; F$$

Обозначим $\vec{V}_1$ - скорость частицы до удара, $\vec{V}_2$ - после удара в системе отсчета, связанной со стенкой. Масса стенки бесконечна, тогда стенка не меняет свою скорость в процессе удара, следовательно, система отсчета, связанная со стенкой - инерциальная. Тогда:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{U}, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_K - \vec{U}.$$

По закону сохранения энергии для абсолютно упругого удара:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2} \Rightarrow |\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$$

Так как стенка параллельна оси y , то проекция скорости частицы на эту ось остается неизменной. Тогда $V_{1x} = -V_{2x}$. Найдем скорость частицы после удара:

$$\begin{cases} V_{Kx} = 2U - V_{0x} \\ V_{Ky} = V_{0y} \end{cases}$$

Тогда:

$$V_K = \sqrt{V_{Kx}^2 + V_{Ky}^2} = \sqrt{(2U - V_0 \cos \beta)^2 + (V_0 \sin \beta)^2}$$

Изменение кинетической энергии во время удара считается по формуле:

$$\Delta E = \frac{m(V_K^2 - V_0^2)}{2}.$$

Проекция скорости на ось y не изменилась, тогда:

$$|\Delta \vec{V}| = |V_{Kx} - V_{0x}| = |2(U - V_0 \cos \beta)|.$$

По закону сохранения импульса:

$$m\vec{V}_K = m\vec{V}_0 + \Delta \vec{p}, \quad \text{где} \quad \Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t.$$

Тогда

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{F} \Delta t| = |m(V_{Kx} - V_{0x})| = |2m(U - V_0 \cos \beta)| \Rightarrow F = \frac{|2m(U - V_0 \cos \beta)|}{\Delta t}.$$

Угол между векторами новой скорости частицы и скорости стенки вычисляется по формуле:

$$a_K = \pi - \arctg \left(\left| \frac{V_{Ky}}{V_{Kx}} \right| \right) = \pi - \arctg \left(\left| \frac{V_0 \sin \beta}{2U - V_0 \cos \beta} \right| \right).$$

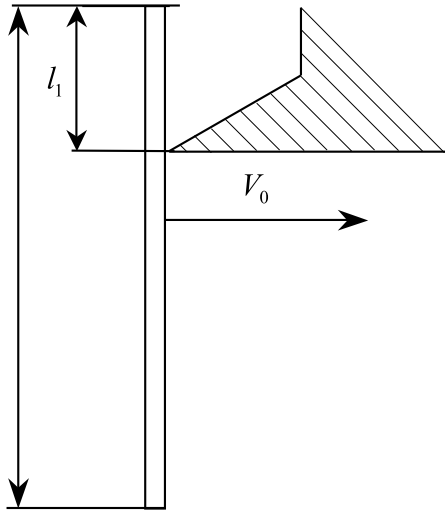
Ответ:

$$\begin{cases} a_K = \pi - \arctg \left(\left| \frac{V_0 \sin \beta}{2U - V_0 \cos \beta} \right| \right) \approx 2.057, \\ \Delta E = \frac{m((2U - V_0 \cos \beta)^2 + (V_0 \sin \beta)^2 - V_0^2)}{2} \approx -0.052 \text{ Дж}, \\ |\Delta \vec{V}| = |2(U - V_0 \cos \beta)| \approx 12.971 \text{ м/с}, \\ F = \frac{|2m(U - V_0 \cos \beta)|}{\Delta t} \approx 2.594 \text{ кН}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l , движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0 , налетает на край массивной преграды. После удара стержень вращается вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{ м}, \quad l_1 = 0.4l, \quad V_0 = 0.5V_{0m}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$.

Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потерциальной энергии уровень, на котором находится ось O . Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_{\pi} = \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1).$$

Положим ω_{0m} - минимальная начальная угловая скорость, при которой возможно второе соударение. Тогда:

$$\frac{I\omega_{0m}^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) = 0.$$

Из полученного соотношения выразим ω_{0m} :

$$\omega_{0m} = \sqrt{\frac{mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

Так как $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$, то $V_{0m} = r\omega_{0m}$.

Когда стержень повернут на угол φ , его потенциальная энергия равна

$$E_{\pi} = \left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) \right) \cdot \cos \varphi.$$

Найдем φ_m :

$$\left(\frac{mgl}{2} - mg(l - l_1) \right) \cdot (\cos \varphi_m - 1) = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \varphi_m = \arccos \left(1 + \frac{I\omega_0^2}{mgl - 2mg(l - l_1)} \right)$$

Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} V_{0m} = r \sqrt{\frac{gl - 2gl_1}{\frac{l^2}{12} + r^2}} \approx 0.458 \text{ м/с}, \\ \omega_0 = \frac{0.4 \cdot V_{0m}}{r} \approx 2.292 \text{ с}^{-1}, \\ \varphi_m = \arccos \left(1 + \frac{\omega_0^2 \left(\frac{l^2}{12} + r^2 \right)}{2gl_1 - gl} \right) \approx 0.723. \end{cases}, \text{ где } r = \frac{l}{2} - l_1$$

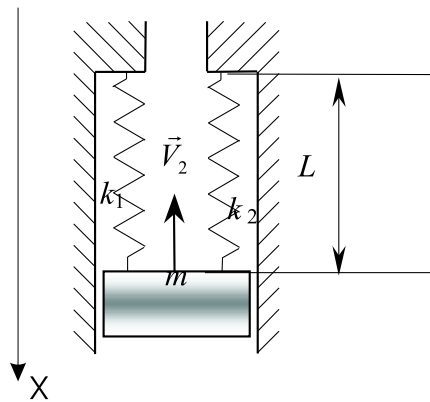
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:

$$\begin{aligned} r &= 0.1 \text{ кг/с}, \\ k_1 &= 8 \text{ Н/м}, \\ k_2 &= 10 \text{ Н/м}, \\ m &= 0.16 \text{ кг}, \\ l_{10} &= l_{20} = 0.2 \text{ м}, \\ L &= 0.26 \text{ м}, \\ V_2 &= 0.08 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Две параллельные пружины с коэффициентами жесткости k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = k_1 + k_2$.

Примем за точку с $x = 0$ точку, в которой все силы, действующие на тело скомпенсированы. x_0 - точка, в которой пружина находится в нерастяннутом положении. В точке $x = 0$ выполняется соотношение $mg = -kx_0$. Отсюда $x_0 = -\frac{mg}{k}$. В произвольной точке x сумма сил упругости и тяжести: $F = mg - k(x_1 - x_0) = mg - mg - kx = -kx$. То есть можно заменить исходную пружину пружиной с такой же жесткостью и с недеформированным положением в точке $x_0 = -\frac{mg}{k}$. Последовательно вычислим искомые величины:

- 1) По Второму Закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x :

$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

- 2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение: $-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$. Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 10.607 \text{ с}^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0.592 \text{ с}$.
- 3) $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 10.602 \text{ с}^{-1}$, где $\beta = \frac{r}{2m}$, $T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 0.593 \text{ с}$
- 4) $\delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 3.2 \text{ с}$
- 5) $\frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}$, где $x_0 = L - (l_{10} + \frac{mg}{k}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_1^2} \approx 0.028 \text{ м}$;
 $\varphi = \arccos\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 2.871$.
- 6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi)$.

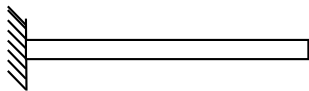
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 12 вариант

Задача 4-1

Условие

Для стержня длиной L , закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
- 2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
- 3) определить частоту и длину волны i -ой гармоники,
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и деформаций.



Материал: медь,
 $\rho = 8.9 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$,
 $E = 12 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $L = 1.2 \text{ м}$,
 $i = 1$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A \cos(\omega t + \widetilde{\varphi}_1) \cos(kx + \widetilde{\varphi}_2)$$

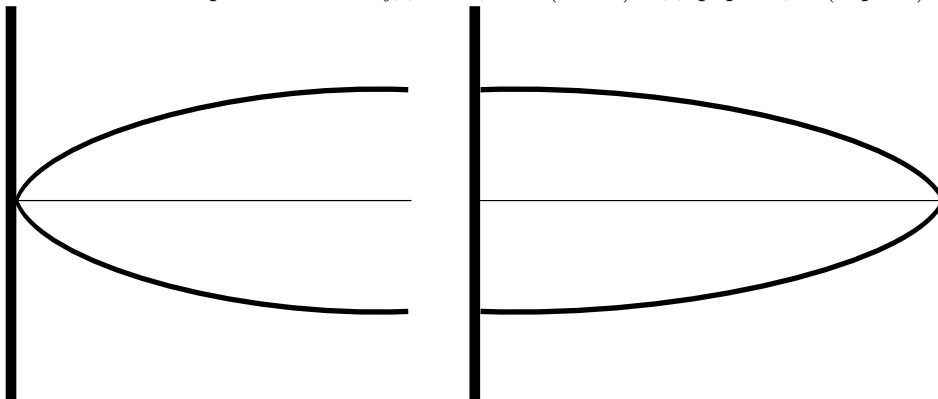
Для данного типа крепления на длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{4L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$

Скорость распространения волн в твердом веществе: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Найдем последовательно искомые величины:

- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi i}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i \in \mathbb{N}$$

- 2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.215 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
- 3) Частота i -ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi i}{2L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.807 \cdot 10^3 \text{ Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{4L}{i} \approx 4.8 \text{ м}$.
- 4) Качественные картины амплитуд смещений (слева) и деформаций (справа):

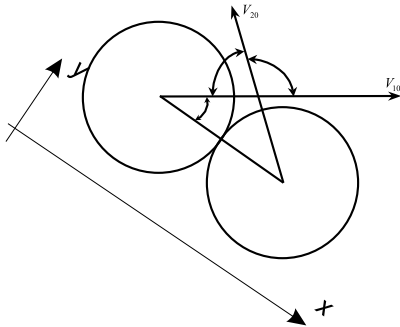


Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 2 вариант

Задача 1-1

Условие

Две гладкие частицы сферической формы с массами m_1 и m_2 движущиеся со скоростями $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$, сталкиваются друг с другом, как указано на рис. 1



$$m_1 = 10^{-3} \text{ кг}, m_2 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг}, V_{10} = 20 \text{ м/с}, V_{20} = 0 \text{ м/с}, \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

Вид удара: **абсолютно упругий**

Требуется определить следующие величины: E_1, E_2, θ

Из закона сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + E_{\text{удар}}$$

Так как удар абсолютно упругий, то энергия при столкновении не выделяется, тогда $E_{\text{удар}} = 0$.

Рассмотрим данные соотношения в проекциях на оси x и y :

Направим ось x вдоль линии, соединяющей центры частиц. При соударении меняются проекции скоростей частиц на ось x , проекции на ось y остаются неизменными.

Обозначим: V_{1x} и V_{2x} - проекции на ось x скоростей первой и второй частиц соответственно после удара.

$$\begin{cases} m_1 V_{10} \cos \varphi = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ m_1 V_{10}^2 = m_1 (V_{1x}^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2) + m_2 (V_{2x}^2 + (V_{20} \sin \beta)^2) \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем проекции на ось x скоростей частиц после удара:

$$\begin{cases} V_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \\ V_{2x} = \frac{2m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Найдем искомые значения:

$$\begin{cases} \theta = \arctg \left(\frac{V_{10} \sin \varphi}{V_{1x}} \right) - \varphi, \\ E_1 = \frac{m_1}{2} ((V_{10} \sin \varphi)^2 + V_{10x}^2), \\ E_2 = m_2 V_{2x}^2. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 2 вариант

Задача 2-1

Условие

Жесткий стержень длиной $l = 1\text{ м}$ и массой $M = 1\text{ кг}$ свободно висит на горизонтальной идеально гладкой оси вращения O , как показано на рисунке. Шарик массой m движется в плоскости рисунка и ударяет в стержень.

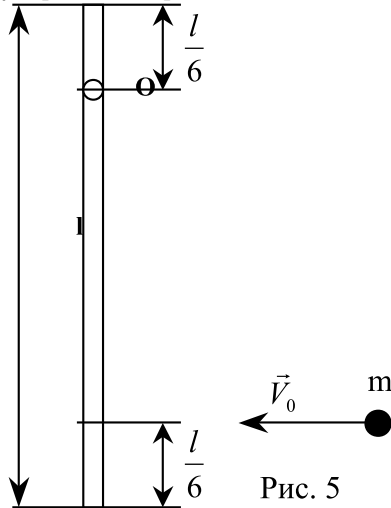


Рис. 5

$V_0 = 2V_{0m}$, Вид удара - **абсолютно неупругий**. Определить: ω_K , V_{0m} , ΔE .
Момент инерции стержня с шариком относительно оси O :

$$I = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{9} + \frac{4mL^2}{9} = \frac{7}{36}ML^2 + \frac{4}{9}mL^2.$$

Возьмем уровень оси O за уровень нулевой потенциальной энергии. Тогда потенциальная энергия стержня с шариком в нижнем положении равна: $W_0 = \frac{MgL}{2} - \frac{MgL}{3} - \frac{2mgl}{3}$. В верхнем положении потенциальная энергия равна $W_1 = \frac{MgL}{2} + \frac{MgL}{3} + \frac{2mgl}{3}$. Энергия необходимая для поднятия стержня на максимальную высоту: $W = \frac{2MgL}{3} + \frac{4mgl}{3}$. По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_{0m}^2}{2} = W \Rightarrow \omega_{0m} = \sqrt{\frac{2W}{I}}.$$

По закону сохранения импульса:

$$mV_0 \frac{2L}{3} = I\omega \Rightarrow V_{0m} = \frac{3I\omega_{0m}}{2mL}.$$

По закону сохранения энергии:

$$\Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = 2mV_{0m}^2 - 2I\omega_{0m}^2.$$

Угловая скорость сразу после соударения:

$$\omega_0 = 2\omega_{0m} = 2\sqrt{\frac{2W}{I}}.$$

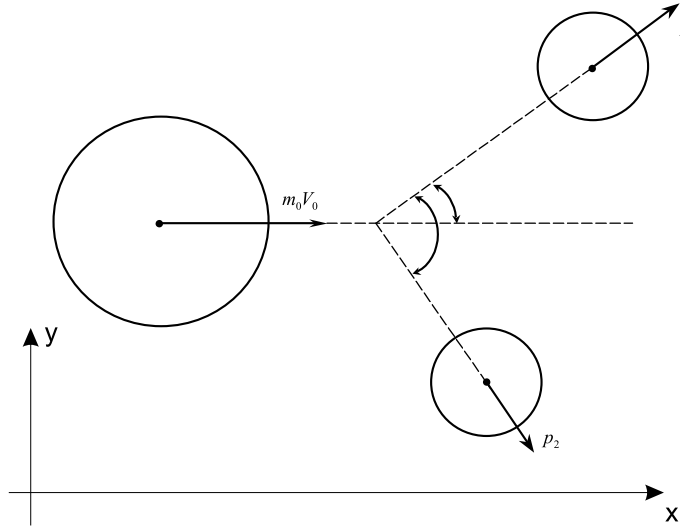
По закону сохранения энергии:

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 22 вариант

Задача 1-3

Условие

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0 , летящая со скоростью $\vec{V}_0$ распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, массы m_1 и m_2 . Импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, кинетические энергии E_1 и E_2 . При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц. φ - Угол разлета частиц, θ - угол отклонения первой частицы от первоначального направления полета исходной частицы.



$$m_0 = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$V_0 = 10 \text{ м/с},$$

$$m_1 = \frac{2}{3} m_0,$$

$$m_2 = \frac{1}{3} m_0,$$

$$p_1 = p_2,$$

$$E_0 = 10 \text{ Дж},$$

$$\eta = 0.175.$$

Необходимо определить следующие величины:

$$\varphi, \theta, V_1, V_2, E_1, E_2$$

Так как $p_2 = \frac{m_1 V_0}{2}$, а $m_2 = \frac{m_1}{3}$, то $V_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{3V_0}{2}$

По закону сохранения импульса:

$$m_0 \vec{V}_0 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_0 V_0^2}{2} + \eta E_0 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Рассмотрим эти соотношения в проекциях на оси x и y . Обозначим $\beta = \varphi - \theta$. Тогда

$$V_{0x} = V_0, V_{0y} = 0, V_{1x} = V_1 \cos \theta, V_{1y} = V_1 \sin \theta, V_{2x} = V_2 \cos \beta, V_{2y} = -V_2 \sin \beta.$$

Получим систему уравнений:

$$\begin{cases} m_0 V_{0x}^2 + 2\eta E_0 = m_1 V_1^2 + m_2 V_2^2, \\ m_1 V_1 = m_2 V_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \sqrt{\frac{m_2(m_0 V_{0x}^2 + 2\eta E_0)}{m_1(m_1 + m_2)}}, \\ V_2 = \sqrt{\frac{m_1(m_0 V_{0x}^2 + 2\eta E_0)}{m_2(m_1 + m_2)}} \end{cases}$$

С учетом того, что $V_{1y} + V_{2y} = 0, V_{1x} + V_{2x} = V_{0x}$, найдем проекции скоростей на координатные оси:

$$\begin{cases} V_{1x} = \frac{m_0^2 V_{0x}^2 - m_2 V_{2x}^2 + m_1 V_{1x}^2}{2m_0 m_1 V_{0x}}, \\ V_{1y} = \frac{\sqrt{(m_1 V_1 + m_0 V_{0x} - m_2 V_2)(m_1 V_1 - m_0 V_{0x} - m_2 V_2)(m_1 V_1 + m_0 V_{0x} + m_2 V_2)(m_1 V_1 + m_2 V_2 - m_0 V_{0x})}}{2m_0 m_1 V_{0x}}, \\ V_{2x} = \frac{m_0^2 V_{0x}^2 + m_2 V_{2x}^2 - m_1 V_{1x}^2}{2m_0 m_2 V_{0x}}, \\ V_{2y} = -\frac{\sqrt{(m_1 V_1 + m_0 V_{0x} - m_2 V_2)(m_1 V_1 - m_0 V_{0x} - m_2 V_2)(m_1 V_1 + m_0 V_{0x} + m_2 V_2)(m_1 V_1 + m_2 V_2 - m_0 V_{0x})}}{2m_0 m_2 V_{0x}}, \end{cases}$$

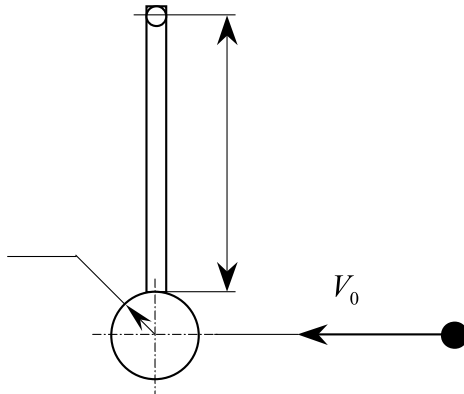
Найдем искомые величины:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{\frac{m_2(m_0 V_{0x}^2 + 2\eta E_0)}{m_1(m_1 + m_2)}} = 15 \text{ м/с}, \\ V_2 = \sqrt{\frac{m_1(m_0 V_{0x}^2 + 2\eta E_0)}{m_2(m_1 + m_2)}} = 30 \text{ м/с}, \\ E_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = 0.75 \text{ Дж}, \\ E_2 = \frac{m_2 V_2^2}{2} = 1.5 \text{ Дж}, \\ \varphi = \arctg\left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}}\right) = -\frac{\pi}{3}, \\ \theta = |\varphi| + \left|\arctg\left(\frac{V_{2y}}{V_{2x}}\right)\right| = \frac{2\pi}{3}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 22 вариант

Задача 2-3

Условие



Физический маятник, состоящий из шара радиусом R и массой M , жестко прикрепленного к тонкому стержню длиной $4R$ и массой M , подвешен к горизонтальной оси O , проходящей через конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка. Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси O . Шарик массы m движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью $\vec{V}_0$ вдоль прямо, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником происходит в виде абсолютно упругого удара.

$$\begin{aligned} R &= 3\text{см}, \\ M &= 1\text{кг}, \\ m &= 0.1\text{кг}, \\ V_0 &= 0.5V_{0m}. \end{aligned}$$

Вычислить:

$$\varphi_m; \quad V_{0m}; \quad \Delta E.$$

Момент инерции системы:

$$I = \frac{16MR^2}{3} + \frac{2MR^2}{5} + 25MR^2 = \frac{461}{15}MR^2$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень, на котором находится ось вращения. Найдём энергию системы в начальном состоянии, состоянии максимального подъёма и состоянии отклонения на угол φ :

$$\begin{cases} E_{п0} = -2MgR - 5MgRr = -7MgR. \\ E_{п1} = 2MgR + 5MgR = 7MgR. \\ E_{п\varphi} = (-2MgR - 5MgR) \cos \varphi = -7MgR \cos \varphi \end{cases}$$

Кинетическая энергия системы сразу после столкновения: $E_{к1} = \frac{I\omega_0^2}{2}$

Найдём ω_m . По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_m^2}{2} - 7MgR = 7MgR \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{28MgR}{I}}.$$

При соударении выполняется закон сохранения момента импульса:

$$I\omega_0 = 5mV_0R. \Rightarrow \omega_0 = \frac{5mV_0R}{I}; \quad V_{0m} = \frac{I\omega_m}{5mR} = \sqrt{\frac{28IgM}{25m^2R}}; \omega_0 = \sqrt{\frac{7MgR}{I}}.$$

Найдём φ_m :

$$\frac{I\omega_0^2}{2} - 7MgR = -7MgR \cos \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \arccos \left(1 - \frac{I\omega_0^2}{14gRM} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right).$$

Запишем полученные результаты:

$$\begin{cases} I = \frac{461}{15}MR^2, \\ V_{0m} = \sqrt{\frac{28IgM}{25m^2R}} \approx 31.828\text{м/с}, \\ \varphi_m = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

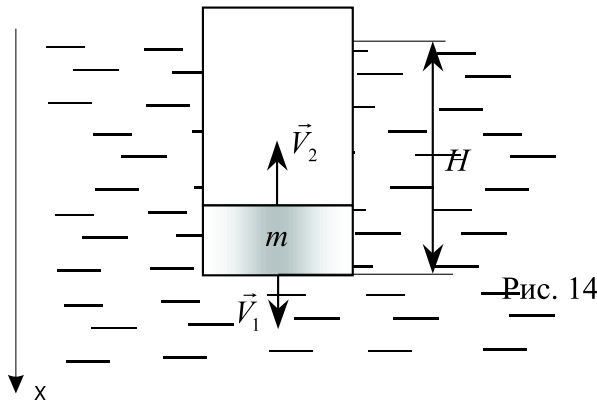
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 22 вариант

Задача 3-2

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:

$$\begin{aligned}\rho &= 10^3 \text{ кг/м}^3, \\ S &= 1.2 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2, \\ m &= 0.2 \text{ кг}, \\ r &= 0.5 \text{ кг/с}, \\ H &= 0.19 \text{ м}, \\ V_2 &= 0.03 \text{ м/с}.\end{aligned}$$

В положении равновесия сила тяжести компенсирует силу Архимеда: $mg - \rho g V = 0$. Примем положение равновесия за положение, где $x = 0$. При отклонении пробирки на величину x . Изменится объем погруженной в воду части и, следовательно, сила Архимеда. Равнодействующая всех сил в таком случае будет равна $F_{\Sigma} = mg - \rho g(V + Sx) = -\rho g S x$. Данное соотношение будет справедливо только тогда, когда пробирка погружена в воду не полностью, в противном случае сила Архимеда не будет зависеть от глубины.

- 1) По Второму Закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x :

$$-\rho g S x - r V_x = m a_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m} \dot{x} + \frac{\rho g S}{m} x = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

- 2) При отсутствии силы $r V_x$ имело бы место соотношение:

$$-\rho g S x = m a \Rightarrow \ddot{x} + \frac{\rho g S}{m} x = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}} \approx 7.672 \text{ с}^{-1}$, а $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}} \approx 0.819 \text{ с}$.

$$3) \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 2.534 \text{ с}^{-1}, \text{ где } \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 2.479 \text{ с}$$

$$4) \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.8 \text{ с}$$

$$5) \frac{\rho g S H^2}{2} + \frac{m V_2^2}{2} = \frac{\rho g S A_0^2}{2}, \Rightarrow A_0 = \sqrt{H^2 + \frac{m}{\rho g S} V_2^2} \approx 0.19 \text{ м};$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{H}{A_0}\right) \approx 0.021.$$

- 6) Уравнение имеет вид: $x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi)$.

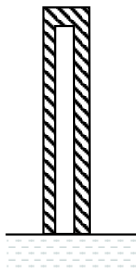
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 22 вариант

Задача 4-1

Условие

Для волновода длиной L , закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
- 2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
- 3) определить частоту и длину волны i -ой гармоники,
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и давлений.



Среда: воздух,
 $c = 340 \text{ м/с}$,
 $L = 1.7 \text{ м}$,
 $i = 4$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

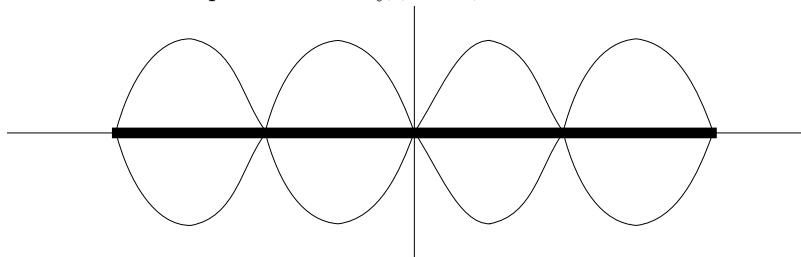
$$\xi = A \cos(\omega t + \widetilde{\varphi}_1) \cos(kx + \widetilde{\varphi}_2)$$

На длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{4L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$ Найдем последовательно искомые величины:

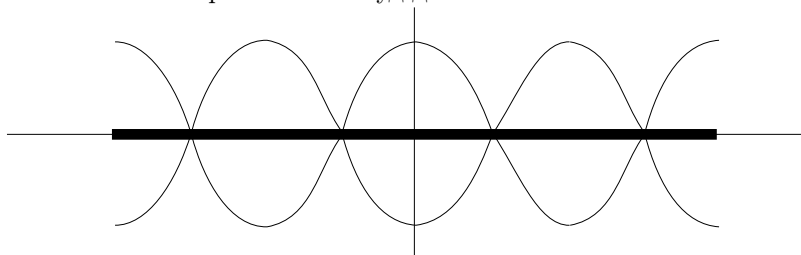
- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi c i}{2L}, \quad i \in \mathbb{N}$$

- 2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi c}{2L} \approx 314 \text{ Гц}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
- 3) Частота i -ой гармони ки: $\omega_i = \frac{\pi c i}{2L} \approx 1.257 \cdot 10^3 \text{ Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{4L}{i} \approx 1.7 \text{ м}$.
- 4) Качественная картина амплитуд смещений:



- 5) Качественная картина амплитуд давлений:

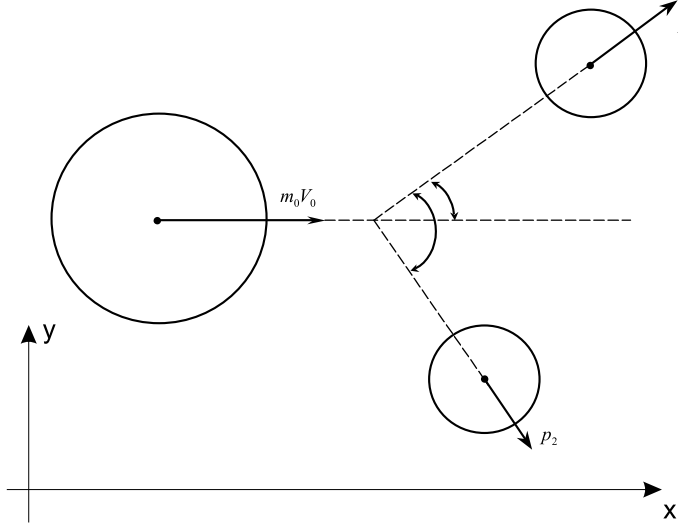


Щербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 1-3

Условие

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0 , летящая со скоростью $\vec{V}_0$ распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, массы m_1 и m_2 . Импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, кинетические энергии E_1 и E_2 . При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц. φ - Угол разлета частиц, θ - угол отклонения первой частицы от первоначального направления полета исходной частицы.



$$m_0 = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$V_0 = 20 \text{ м/с},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$m_1 = \frac{2}{3} m,$$

$$m_2 = \frac{1}{3} m,$$

$$p_2 = \frac{m_0 V_0}{2}$$

Необходимо определить следующие величины:

$$\theta, V_1, p_1, E_1, E_2, \eta E_0$$

Так как $p_2 = \frac{m_0 V_0}{2}$, а $m_2 = \frac{m}{3}$, то $V_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{3V_0}{2}$

По закону сохранения импульса:

$$m_0 \vec{V}_0 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_0 V_0^2}{2} + \eta E_0 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Рассмотрим эти соотношения в проекциях на оси x и y . Обозначим $\beta = \varphi - \theta$. Тогда

$$V_{0x} = V_0, V_{0y} = 0, V_{1x} = V_1 \cos \theta, V_{1y} = V_1 \sin \theta, V_{2x} = V_2 \cos \beta, V_{2y} = -V_2 \sin \beta.$$

Так как $\varphi = \theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\text{tg } \theta = \text{ctg } \beta$. Получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4}, \\ m_0 V_0 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}, \\ m_1 V_{1y} = -m_2 V_{2y}, \\ m_0 V_0^2 + 2\eta E_0 = m_1 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2) + m_2 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2), \\ V_{2x}^2 + V_{2y}^2 = \frac{9V_0^2}{4}, \\ \frac{V_{1x}}{V_{1y}} = -\frac{V_{2x}}{V_{2y}}. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4}, \\ V_{1x} = \frac{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{m_0 V_0 m_1}, \\ V_{1y} = \frac{m_2 V_2 (m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2)}{(m_0 m_1 V_0) \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}, \\ V_{2x} = \frac{m_2 V_2}{m_0 V_0}, \\ V_{2y} = -\frac{V_2 \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}{m_0 V_0}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1 m_2 V_2^2 + m_0^2 V_0^2 - m_1 m_0 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{2m_1}. \end{array} \right.$$

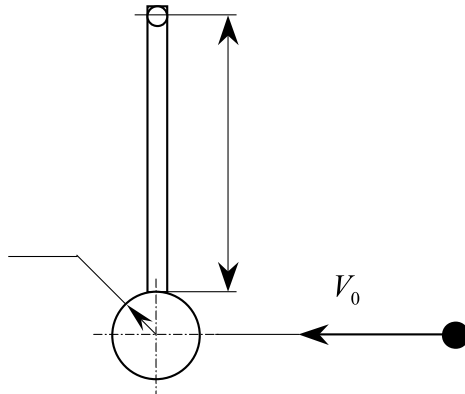
Найдем искомые величины:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4} = 30 \text{ м/с}, \\ \theta = \text{arctg} \left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}} \right) = \text{arctg} \left(\frac{m_2 V_2}{\sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}} \right) = \frac{\pi}{6}, \\ V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{m_0 V_0 m_1} \right)^2 + \left(\frac{m_2 V_2 (m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2)}{(m_0 m_1 V_0) \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}} \right)^2} = 15\sqrt{3} \approx 25.981 \text{ м/с}, \\ p_1 = m_1 V_1 = \frac{\sqrt{3}}{100} \approx 0.017 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}, \\ E_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{9}{40} \approx 0.225 \text{ Дж}, \\ E_2 = \frac{m_2 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2)}{2} = \frac{m_2 \left(\left(\frac{m_2 V_2}{m_0 V_0} \right)^2 + \left(\frac{V_2 \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}{m_0 V_0} \right)^2 \right)}{2} = 0.3 \text{ Дж}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1 m_2 V_2^2 + m_0^2 V_0^2 - m_1 m_0 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{2m_1} = \frac{7}{40} = 0.175 \text{ Дж}. \end{array} \right.$$

Шербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 2-3

Условие



Физический маятник, состоящий из шара радиусом R и массой M , жестко прикрепленного к тонкому стержню длиной $4R$ и массой M , подвешен к горизонтальной оси O , проходящей через конец стержня перпендикулярно плоскости рисунка. Маятник может свободно без трения вращаться вокруг оси O . Шарик массы m движется горизонтально в плоскости рисунка со скоростью $\vec{V}_0$ вдоль прямо, проходящей через центр шара, и ударяет в шар. При этом взаимодействие шарика с маятником происходит в виде абсолютно неупругого удара.

$$\begin{aligned} R &= 3\text{см}, \\ M &= 1\text{кг}, \\ m &= 0.1\text{кг}, \\ V_0 &= 0.5V_{0m}. \end{aligned}$$

Вычислить:

$$\varphi_m; \quad V_{0m}; \quad \Delta E.$$

Момент инерции системы с шариком (шарик считается материальной точкой):

$$I = I + 25mR^2 = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2.$$

За нулевой уровень потенциальной энергии выберем уровень, на котором находится ось вращения. Найдем энергию системы в начальном состоянии, состоянии максимального подъема и состоянии отклонения на угол φ :

$$\begin{cases} E_{п0} = -2MgR - 5MgR - 5mgr = -(7M + 5m)gR. \\ E_{п1} = 2MgR + 5MgR + 5mgr = (7M + 5m)gR. \\ E_{п\varphi} = (-2MgR - 5MgR - 5mgr) \cos \varphi = -(7M + 5m)gR \cos \varphi \end{cases}$$

Кинетическая энергия системы сразу после столкновения: $E_{к1} = \frac{I\omega_0^2}{2}$

Найдем ω_m . По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_m^2}{2} - (7M + 5m)gR = (7M + 5m)gR \Rightarrow \omega_m = \sqrt{\frac{4(7M + 5m)gR}{I}}.$$

При соударении выполняется закон сохранения момента импульса:

$$I\omega_0 = 5mV_0R. \Rightarrow \omega_0 = \frac{5mV_0R}{I}; \quad V_{0m} = \frac{I\omega_m}{5mR} = \sqrt{\frac{4Ig(7M + 5m)}{25m^2R}}; \omega_0 = \sqrt{\frac{(7M + 5m)gR}{I}}.$$

Запишем закон сохранения энергии для рассматриваемого случая:

$$\frac{mV_0^2}{2} + \Delta E = \frac{I\omega_0^2}{2} \Rightarrow \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{I\omega_0^2}{2} = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I}$$

Найдем φ_m :

$$\frac{I\omega_0^2}{2} - (7M + 5m)gR = -(7M + 5m)gR \cos \varphi_m \Rightarrow \varphi_m = \arccos \left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M + 5m)} \right).$$

Запишем полученные результаты:

$$\begin{cases} I = \frac{401}{15}MR^2 + 25mR^2, \\ V_{0m} = \sqrt{\frac{4Ig(7M + 5m)}{25m^2R}} \approx 32.131\text{м/с}, \\ \Delta E = \frac{mV_0^2}{2} - \frac{25m^2V_0^2R^2}{2I} \approx 11.801\text{Дж}, \\ \varphi_m = \arccos \left(1 - \frac{I\omega_0^2}{2gR(7M + 5m)} \right) = \arccos \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3}. \end{cases}$$

Шербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

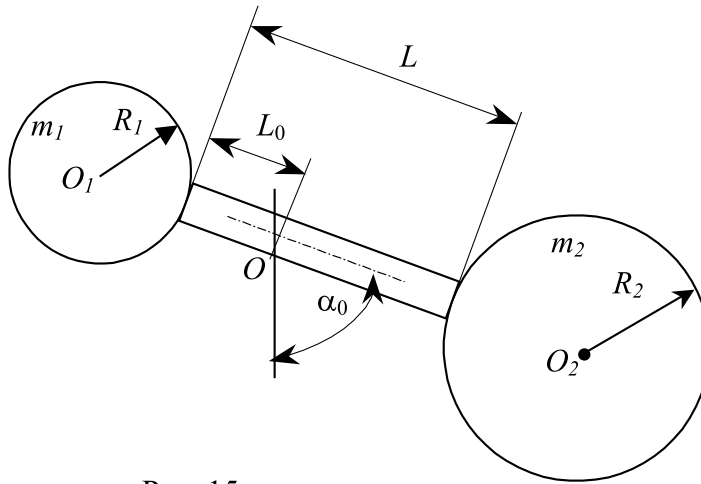
Задача 3-3

Условие

На рисунке представлен физический маятник, состоящий из двух шаров радиусами R_1 и R_2 и массами соответственно m_1 и m_2 . Шары жестко скреплены с помощью стержня длиной L и массой m_1 . Через точку O стержня проходит горизонтальная ось вращения, расположенная на расстоянии l_0 от верхнего конца стержня. Маятник отклоняют от положения равновесия на угол α_0 , затем в начальный момент времени $t = 0$ отпускают. В результате маятник начинает совершать свободные незатухающие колебания. Коэффициент сопротивления считать равным нулю.

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 4) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



$$\begin{aligned} r &= 0, \\ m_1 &= 2.1 \text{ кг}, \\ m_2 &= 4.1 \text{ кг}, \\ R_1 &= 0.04 \text{ м}, \\ R_2 &= 0.05 \text{ м}, \\ L &= 1, 2 \text{ м}, \\ l_0 &= 0.4 \text{ м}, \\ \alpha &= \frac{\pi}{9}. \end{aligned}$$

Рис. 15

Вычислим момент инерции системы относительно оси O :

$$I = \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1(R_1 + l_0)^2 + \frac{1}{3}m_1L^2 + m_1l_0^2 + \frac{2}{5}m_2R_2^2 + m_2(R_2 + L - l_0)^2$$

Вычислим расстояние x_0 от верхнего конца стержня до центра масс системы:

$$-m_1(R_1 + x_0) + m_2(R_2 + L - x_0) + m_1\left(\frac{L}{2} - x_0\right) = 0 \Rightarrow x_0 = \frac{2m_2r_2 + 2m_2L + m_1L - 2m_1r_1}{2(2m_1 + m_2)}$$

Последовательно вычислим искомые величины:

- 1) В процессе колебаний на систему действует сила тяжести. Ее момент равен $M = -g(2m_1 + m_2)(x_0 - l_0)\alpha$. Тогда:

$$M = I\epsilon \Rightarrow \ddot{\alpha} + \frac{g(2m_1 + m_2)(x_0 - l_0)}{I}\alpha = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных незатухающих колебаний.

$$2) \omega_0 = \sqrt{\frac{g(2m_1 + m_2)(x_0 - l_0)}{I}} \approx 2.249 \text{ с}^{-1}, T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2.524 \text{ с}, \text{ где} \\ x_0 = \frac{2m_2r_2 + 2m_2L + m_1L - 2m_1r_1}{2(2m_1 + m_2)}, I = \frac{2}{5}m_1R_1^2 + m_1(R_1 + l_0)^2 + \frac{1}{3}m_1L^2 + m_1l_0^2 + \frac{2}{5}m_2R_2^2 + m_2(R_2 + L - l_0)^2.$$

$$3) A_0 = \alpha_0 = \frac{\pi}{9}, \varphi = 0.$$

$$4) \alpha = \alpha_0 \cos(\omega_0 t).$$

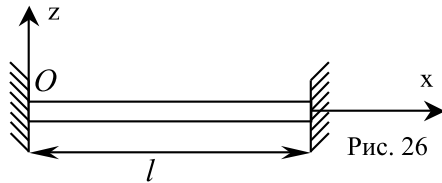
Шербаков Иван Сергеевич, ИУ8-21, 26 вариант

Задача 4-4

Условие

Для струны длиной l , натянутой с силой $\vec{F}$ и закрепленной, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) определить частоту колебаний и длину волны i -ой гармоники стоячей волны,
- 2) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и давлений.



Материал: сталь,
 $L = 1.2\text{м}$,
 $d = 0.3\text{мм}$,
 $\rho = 7.8 \cdot 10^3 \text{кг/м}^3$,
 $F = 5\text{Н}$,
 $i = 4$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A \cos(\omega t + \widetilde{\varphi}_1) \cos(kx + \widetilde{\varphi}_2)$$

На длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{2L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$ Скорость распространения волн в струне: $c = \sqrt{\frac{F}{\tau}}$, где $\tau = \rho S$, $S = \frac{\pi d^2}{4}$. Тогда,

$$c = \sqrt{\frac{4F}{\pi d^2 \rho}}.$$

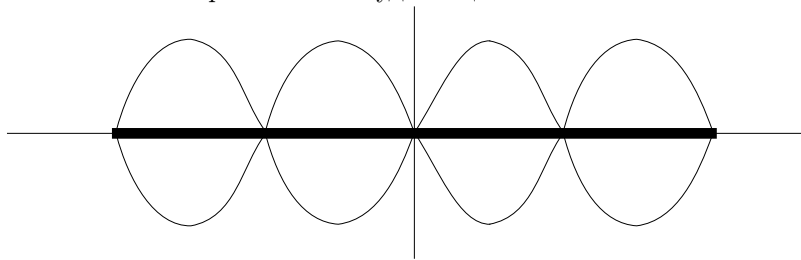
Найдем последовательно искомые величины:

- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

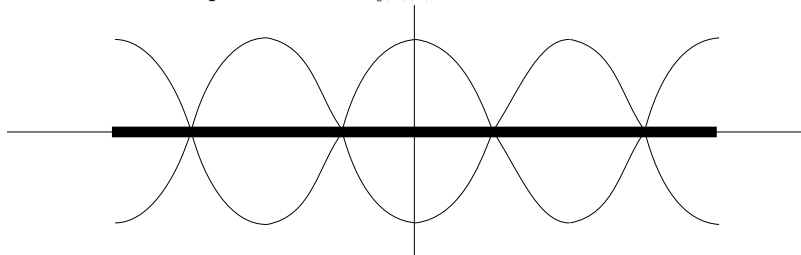
$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi c i}{L}, \quad i \in \mathbb{N}$$

Частота $\omega_0 = \frac{\pi c}{L}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам. Частота i -ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi c i}{L} \approx 9.972 \cdot 10^3 \text{Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{2L}{i} = 0.6\text{м}$.

- 2) Качественная картина амплитуд смещений:



- 3) Качественная картина амплитуд давлений:

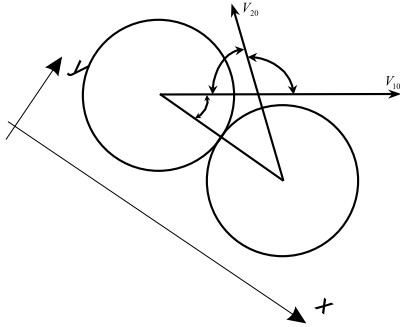


Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 9 вариант

Задача 1-1

Условие

Две гладкие частицы сферической формы с массами m_1 и m_2 движущиеся со скоростями $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$, сталкиваются друг с другом, как указано на рис. 1



$$m_1 = 10^{-3} \text{ кг}; \quad m_2 = 10^{-3} \text{ кг}; \quad V_{10} = 10 \text{ м/с}; \quad V_{20} = V_{10} \text{ м/с}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Вид удара: **абсолютно упругий**

Требуется определить следующие величины: V_1 ; V_2 ; γ

Из закона сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + E_{\text{удар}}$$

Так как удар абсолютно упругий, то энергия при столкновении не выделяется, тогда $E_{\text{удар}} = 0$.

Рассмотрим данные соотношения в проекциях на оси x и y :

Направим ось x вдоль линии, соединяющей центры частиц. При соударении меняются проекции скоростей частиц на ось x , проекции на ось y остаются неизменными.

Обозначим: $\beta = \alpha - \varphi$; V_{1x} и V_{2x} - проекции на ось x скоростей первой и второй частиц соответственно после удара.

$$\begin{cases} m_1 V_{10} \cos \varphi - m_2 V_{20} \cos \beta = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ m_1 V_{10}^2 + m_2 V_{20}^2 = m_1 (V_{1x}^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2) + m_2 (V_{2x}^2 + (V_{20} \sin \beta)^2) \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем проекции на ось x скоростей частиц после удара:

$$\begin{cases} V_{1x} = \frac{(m_1 - m_2) V_{10} \cos \varphi - 2 m_2 V_{20} \cos \beta}{m_1 + m_2} \\ V_{2x} = \frac{(m_1 - m_2) V_{20} \cos \beta + 2 m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае $m_1 = m_2$ и $\beta = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} V_{1x} = -\frac{2 m_2 V_{20}}{m_1 + m_2} \\ V_{2x} = \frac{2 m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

Найдем искомые величины:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2 m_2 V_{20}}{m_1 + m_2}\right)^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2} = 5\sqrt{6} \approx 12.247 \text{ м/с}, \\ V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + (V_{20} \sin \beta)^2} = \frac{2 m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} = 5\sqrt{2} \approx 7.071 \text{ м/с}, \\ \gamma = \pi + \arctg\left(\frac{V_{10} \sin \varphi}{V_{1x}}\right) - \arctg\left(\frac{V_{20} \sin \beta}{V_{2x}}\right) = \pi - \arctg\left(\frac{(m_1 + m_2) V_{10} \sin \varphi}{2 m_2 V_{20}}\right) = \pi - \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.526. \end{cases}$$

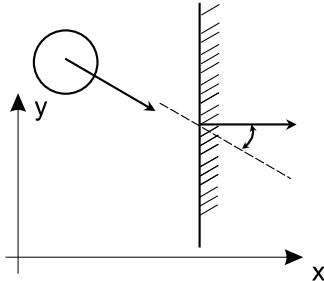
Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 14 вариант

Задача 1-2

Условие

Гладкая частица сферической формы массы m , летящая со скоростью $\vec{V}_0$, ударяется о гладкую массивную стенку, которая движется со скоростью $\vec{U}$. Угол, образованный векторами $\vec{V}_0$ и $\vec{U}$ равен β . Массу стенки считать бесконечной.

$$m = 3 \cdot 10^{-3} \text{ кг}; \quad V_0 = 3 \text{ м/с}; \quad U = 1 \text{ м/с}; \quad \beta = \frac{\pi}{6};$$



Вид удара: **абсолютно упругий**.

Требуется определить следующие величины:

$$V_K, \Delta E, |\Delta \vec{p}|, F \Delta t$$

Обозначим $\vec{V}_1$ - скорость частицы до удара, $\vec{V}_2$ - после удара в системе отсчета, связанной со стенкой. Масса стенки бесконечна, тогда стенка не меняет свою скорость в процессе удара, следовательно, система отсчета, связанная со стенкой - инерциальная. Тогда:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}_0 - \vec{U}, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}_K - \vec{U}.$$

По закону сохранения энергии для абсолютно упругого удара:

$$\frac{mV_1^2}{2} = \frac{mV_2^2}{2}$$

Тогда:

$$|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$$

Так как стенка параллельна оси y , то проекция скорости частицы на эту ось остается неизменной. Тогда $V_{1x} = -V_{2x}$. Найдём скорость частицы после удара:

$$\begin{cases} V_{Kx} = 2U - V_{0x} \\ V_{Ky} = V_{0y} \end{cases}$$

Тогда:

$$V_K = \sqrt{V_{Kx}^2 + V_{Ky}^2} = \sqrt{(2U - V_0 \cos \beta)^2 + (V_0 \sin \beta)^2}$$

Изменение кинетической энергии во время удара считается по формуле:

$$\Delta E = m(V_K^2 - V_0^2).$$

По закону сохранения импульса:

$$m\vec{V}_K = m\vec{V}_0 + \Delta \vec{p}, \quad \text{где } \Delta \vec{p} = \vec{F} \Delta t.$$

Тогда

$$|\Delta \vec{p}| = |\vec{F} \Delta t| = |m(V_{Kx} - V_{0x})| = |2m(U - V_0 \sin \beta)|.$$

Ответ:

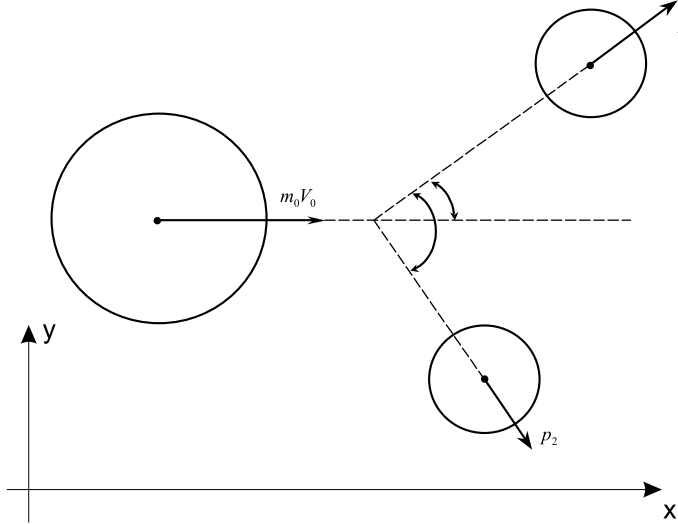
$$\begin{cases} V_K = \sqrt{(2U - V_0 \cos \beta)^2 + (V_0 \sin \beta)^2} = \sqrt{16 - 6\sqrt{3}} \approx 1.615 \text{ м/с}, \\ \Delta E = m((2U - V_0 \cos \beta)^2 + (V_0 \sin \beta)^2 - V_0^2) = -\frac{6-9\sqrt{3}}{500} \approx -0.019 \text{ Дж}, \\ |\Delta \vec{p}| = |\vec{F} \Delta t| = |2m(U - V_0 \sin \beta)| = 3 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}. \end{cases}$$

Типовой расчет по физике, 1 курс, 2 семестр, 26 вариант

Задача 1-3

Условие

Нерелятивистская частица с внутренней энергией E_0 и массой m_0 , летящая со скоростью $\vec{V}_0$ распадается на две нерелятивистские частицы, скорости которых $\vec{V}_1$ и $\vec{V}_2$, массы m_1 и m_2 . Импульсы $\vec{p}_1$ и $\vec{p}_2$, кинетические энергии E_1 и E_2 . При этом часть внутренней энергии E_0 исходной частицы в количестве ηE_0 расходуется на увеличение кинетической энергии образовавшихся частиц. φ - Угол разлета частиц, θ - угол отклонения первой частицы от первоначального направления полета исходной частицы.



$$m_0 = 10^{-2} \text{ кг},$$

$$V_0 = 20 \text{ м/с},$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$m_1 = \frac{2}{3} m,$$

$$m_2 = \frac{1}{3} m,$$

$$p_2 = \frac{m_0 V_0}{2}$$

Необходимо определить следующие величины:

$$\theta, V_1, p_1, E_1, E_2, \eta E_0$$

Так как $p_2 = \frac{m_0 V_0}{2}$, а $m_2 = \frac{m}{3}$, то $V_2 = \frac{p_2}{m_2} = \frac{3V_0}{2}$

По закону сохранения импульса:

$$m_0 \vec{V}_0 = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{m_0 V_0^2}{2} + \eta E_0 = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2}$$

Рассмотрим эти соотношения в проекциях на оси x и y . Обозначим $\beta = \varphi - \theta$. Тогда

$$V_{0x} = V_0, V_{0y} = 0, V_{1x} = V_1 \cos \theta, V_{1y} = V_1 \sin \theta, V_{2x} = V_2 \cos \beta, V_{2y} = -V_2 \sin \beta.$$

Так как $\varphi = \theta + \beta = \frac{\pi}{2}$, то $\text{tg } \theta = \text{ctg } \beta$. Получим систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4}, \\ m_0 V_0 = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x}, \\ m_1 V_{1y} = -m_2 V_{2y}, \\ m_0 V_0^2 + 2\eta E_0 = m_1 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2) + m_2 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2), \\ V_{2x}^2 + V_{2y}^2 = \frac{9V_0^2}{4}, \\ \frac{V_{1x}}{V_{1y}} = -\frac{V_{2x}}{V_{2y}}. \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4}, \\ V_{1x} = \frac{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{m_0 V_0 m_1}, \\ V_{1y} = \frac{m_2 V_2 (m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2)}{(m_0 m_1 V_0) \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}, \\ V_{2x} = \frac{m_2 V_2}{m_0 V_0}, \\ V_{2y} = -\frac{V_2 \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}{m_0 V_0}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1 m_2 V_2^2 + m_0^2 V_0^2 - m_1 m_0 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{2m_1}. \end{array} \right.$$

Найдем искомые величины:

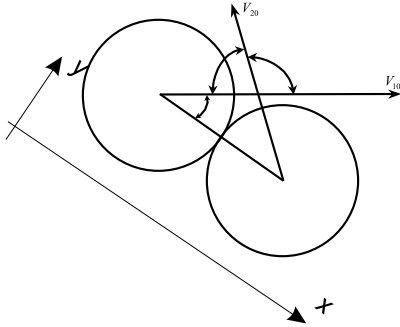
$$\left\{ \begin{array}{l} V_2 = \frac{9V_0}{4} = 30 \text{ м/с}, \\ \theta = \text{arctg} \left(\frac{V_{1y}}{V_{1x}} \right) = \text{arctg} \left(\frac{m_2 V_2}{\sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}} \right) = \frac{\pi}{6}, \\ V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + V_{1y}^2} = \sqrt{\left(\frac{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{m_0 V_0 m_1} \right)^2 + \left(\frac{m_2 V_2 (m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2)}{(m_0 m_1 V_0) \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}} \right)^2} = 15\sqrt{3} \approx 25.981 \text{ м/с}, \\ p_1 = m_1 V_1 = \frac{\sqrt{3}}{100} \approx 0.017 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}}{\text{с}}, \\ E_1 = \frac{m_1 V_1^2}{2} = \frac{9}{40} \approx 0.225 \text{ Дж}, \\ E_2 = \frac{m_2 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2)}{2} = \frac{m_2 \left(\left(\frac{m_2 V_2}{m_0 V_0} \right)^2 + \left(\frac{V_2 \sqrt{m_0^2 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}}{m_0 V_0} \right)^2 \right)}{2} = 0.3 \text{ Дж}, \\ \eta E_0 = \frac{m_1 m_2 V_2^2 + m_0^2 V_0^2 - m_1 m_0 V_0^2 - m_2^2 V_2^2}{2m_1} = \frac{7}{40} = 0.175 \text{ Дж}. \end{array} \right.$$

Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 1-1

Условие

Две гладкие частицы сферической формы с массами m_1 и m_2 движущиеся со скоростями $\vec{V}_{10}$ и $\vec{V}_{20}$, сталкиваются друг с другом, как указано на рис. 1



$$m_1 = 10^{-3} \text{ кг}; \quad m_2 = 10^{-3} \text{ кг}; \quad V_{10} = 10 \text{ м/с}; \quad V_{20} = V_{10} \text{ м/с}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

Вид удара: **абсолютно упругий**

Требуется определить следующие величины: V_1 ; V_2 ; γ

Из закона сохранения импульса:

$$m_1 \vec{V}_{10} + m_2 \vec{V}_{20} = m_1 \vec{V}_1 + m_2 \vec{V}_2$$

Из закона сохранения энергии:

$$\frac{m_1 V_{10}^2}{2} + \frac{m_2 V_{20}^2}{2} = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_2^2}{2} + E_{\text{удар}}$$

Так как удар абсолютно упругий, то энергия при столкновении не выделяется, тогда $E_{\text{удар}} = 0$.

Рассмотрим данные соотношения в проекциях на оси x и y :

Направим ось x вдоль линии, соединяющей центры частиц. При соударении меняются проекции скоростей частиц на ось x , проекции на ось y остаются неизменными.

Обозначим: $\beta = \alpha - \varphi$; V_{1x} и V_{2x} - проекции на ось x скоростей первой и второй частиц соответственно после удара.

$$\begin{cases} m_1 V_{10} \cos \varphi - m_2 V_{20} \cos \beta = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ m_1 V_{10}^2 + m_2 V_{20}^2 = m_1 (V_{1x}^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2) + m_2 (V_{2x}^2 + (V_{20} \sin \beta)^2) \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, найдем проекции на ось x скоростей частиц после удара:

$$\begin{cases} V_{1x} = \frac{(m_1 - m_2)V_{10} \cos \varphi - 2m_2 V_{20} \cos \beta}{m_1 + m_2} \\ V_{2x} = \frac{(m_1 - m_2)V_{20} \cos \beta + 2m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

В рассматриваемом случае $m_1 = m_2$ и $\beta = 0$. Тогда:

$$\begin{cases} V_{1x} = -\frac{2m_2 V_{20}}{m_1 + m_2} \\ V_{2x} = \frac{2m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} \end{cases}$$

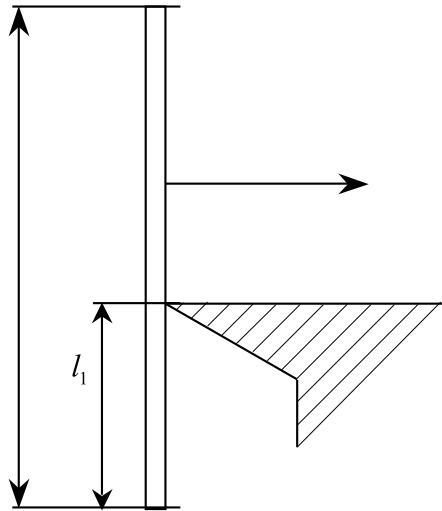
Найдем искомые величины:

$$\begin{cases} V_1 = \sqrt{V_{1x}^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2m_2 V_{20}}{m_1 + m_2}\right)^2 + (V_{10} \sin \varphi)^2} = 5\sqrt{6} \approx 12.247 \text{ м/с}, \\ V_2 = \sqrt{V_{2x}^2 + (V_{20} \sin \beta)^2} = \frac{2m_1 V_{10} \cos \varphi}{m_1 + m_2} = 5\sqrt{2} \approx 7.071 \text{ м/с}, \\ \gamma = \pi + \arctg\left(\frac{V_{10} \sin \varphi}{V_{1x}}\right) - \arctg\left(\frac{V_{20} \sin \beta}{V_{2x}}\right) = \pi - \arctg\left(\frac{(m_1 + m_2)V_{10} \sin \varphi}{2m_2 V_{20}}\right) = \pi - \arctg\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \approx 2.526. \end{cases}$$

Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 2-2

Условие



Однородный тонкий вертикальный стержень длины l , движущийся поступательно в плоскости рисунка с горизонтальной скоростью V_0 , налетает на край массивной преграды. После удара стержень вращается вокруг оси O , перпендикулярной плоскости рисунка. Ось вращения стержня совпадает с ребром преграды и проходит через точку удара стержня о преграду. Потерями механической энергии при вращении стержня после удара пренебречь.

$$l = 1\text{ м}, \quad l_1 = 0.2l, \quad V_0 = 1\text{ м/с}.$$

Сразу после столкновения центр масс стержня имеет ту же скорость, что и до столкновения. Определим расстояние от центра масс до оси вращения: $r = \frac{l}{2} - l_1$. Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через его центр - $\frac{ml^2}{12}$.

Для оси O он будет равен $I = \frac{ml^2}{12} + mr^2$. Сразу после столкновения угловая скорость стержня равна $\omega_0 = \frac{V_0}{r}$. Кинетическая энергия стержня сразу после столкновения равна

$$E_k = \frac{I\omega_0^2}{2}.$$

Выберем за нулевой уровень потенциальной энергии уровень, на котором находится ось O . Тогда на этом уровне потенциальная энергия стержня будет равна нулю, а в исходном положении она равна

$$E_n = \frac{mgl}{2} - mgl_1.$$

По закону сохранения энергии:

$$\frac{I\omega_0^2}{2} + \frac{mgl}{2} - mgl_1 = \frac{I\omega_k^2}{2}.$$

Тогда:

$$\omega_k = \sqrt{\frac{I\omega_0^2 + mgl - 2mgl_1}{I}}.$$

Запишем полученные величины:

$$\begin{cases} \omega_0 = \frac{V_0}{\frac{l}{2} - l_1} = \frac{10}{3} \approx 3.33\text{ с}^{-1}, \\ \omega_k = \sqrt{\frac{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)\omega_0^2 + gl - 2gl_1}{\left(\frac{l^2}{12} + r^2\right)}} \approx 6.713\text{ с}^{-1}, \end{cases} \text{ где } r = \frac{l}{2} - l_1$$

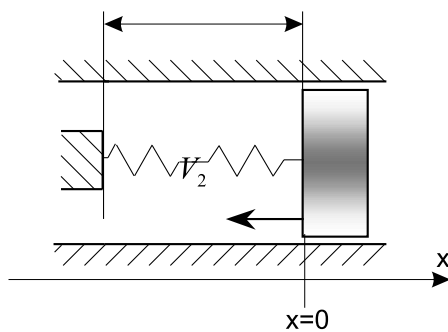
Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 3-1

Условие

Для данной колебательной системы необходимо:

- 1) Вывести дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний, если сила сопротивления движению КС пропорциональна скорости, т.е. $\vec{F} = -r\vec{V}$, где r - коэффициент сопротивления.
- 2) Определить круговую частоту ω_0 и период T_0 свободных незатухающих колебаний.
- 3) Найти круговую частоту ω и период T свободных затухающих колебаний.
- 4) Вычислить логарифмический декремент затухания.
- 5) Определить, используя начальные условия задачи и исходные данные, начальные амплитуду A_0 и фазу φ_0 колебаний.
- 6) Написать с учетом найденных значений уравнение колебаний.



Исходные данные:

$$\begin{aligned} r &= 0.3 \text{ кг/с}, \\ k_1 &= 10 \text{ Н/м}, \\ k_2 &= 12 \text{ Н/м}, \\ m &= 0.14 \text{ кг}, \\ l_{10} &= l_{20} = 0.11 \text{ м}, \\ L &= 0.23 \text{ м}, \\ V_2 &= 0.03 \text{ м/с}. \end{aligned}$$

Две последовательно соединенные пружины с коэффициентами k_1 и k_2 можно заменить одной пружиной с коэффициентом жесткости $k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Последовательно вычислим искомые величины:

- 1) По Второму Закону Ньютона:

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

Рассмотрим это соотношение в проекции на ось x :

$$-kx - rV_x = ma_x \Rightarrow \ddot{x} + \frac{r}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Получено дифференциальное уравнение свободных затухающих колебаний.

- 2) При отсутствии силы rV_x имело бы место соотношение:

$$-kx = ma \Rightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

Полученное уравнение является дифференциальным уравнением свободных незатухающих колебаний, причем $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \approx 6.242 \text{ с}^{-1}$, а $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1.007 \text{ с}$.

$$3) \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} \approx 6.242 \text{ с}^{-1}, \text{ где } \beta = \frac{r}{2m}, T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} \approx 1.022 \text{ с}$$

$$4) \delta = \frac{1}{\beta} = \frac{2m}{r} \approx 0.933 \text{ с}$$

$$5) \frac{kx_0^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2} = \frac{kA_0^2}{2}, \text{ где } x_0 = L - (l_{10} + l_{20}) \Rightarrow A_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k}V_2^2} \approx 0.011 \text{ м};$$
$$\varphi = \arccos\left(\frac{x_0}{A_0}\right) \approx 0.448.$$

$$6) \text{ Уравнение имеет вид: } x(t) = A_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \varphi).$$

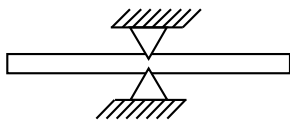
Ворожба Станислав, ИУ8-23, 9 вариант

Задача 4-1

Условие

Для стержня длиной L , закрепленного, как указано на рисунке, необходимо:

- 1) вывести формулу для возможных частот продольных волн, возбуждаемых в стержне, при которых в нём образуется стоячая волна,
- 2) указать какая частота колебаний является основной, а какие частоты относятся к обертонам (к высшим гармоникам),
- 3) определить частоту и длину волны i -ой гармоники,
- 4) для этой гармоники нарисовать вдоль стержня качественные картины стоячих волн амплитуд смещений и деформаций.



Материал: алюминий,
 $\rho = 2.7 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$,
 $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$,
 $L = 1.2 \text{ м}$,
 $i = 3$.

Стоячая волна будет образовываться при наложении двух противоположных волн $\xi_1 = A \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ и $\xi_2 = A \cos(\omega t + kx + \varphi_2)$. Она будет иметь вид:

$$\xi = A \cos(\omega t + \widetilde{\varphi}_1) \cos(kx + \widetilde{\varphi}_2)$$

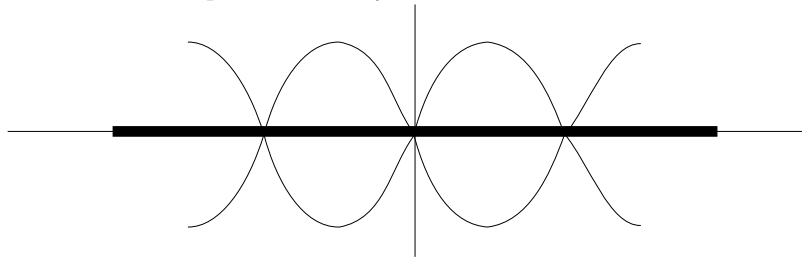
Для данного типа крепления на длину стоячей волны накладывается ограничение: $\lambda = \frac{2L}{i}$, $i \in \mathbb{N}$

Скорость распространения волн в твердом веществе: $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$. Найдем последовательно искомые величины:

- 1) Найдем ограничение, накладываемое на частоту волн, способных образовывать стоячие волны:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \Rightarrow \omega = \frac{\pi i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad i \in \mathbb{N}$$

- 2) Частота $\omega_0 = \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 4.215 \cdot 10^5 \text{ Гц}$ является основной, частоты при $i > 1$ относятся к обертонам.
- 3) Частота i -ой гармоники: $\omega_i = \frac{\pi i}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}} \approx 1.265 \cdot 10^6 \text{ Гц}$, длина волны: $\lambda_i = \frac{2L}{i} \approx 0.8 \text{ м}$.
- 4) Качественная картина амплитуд смещений:



- 5) Качественная картина амплитуд деформаций:

