



МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Билеты для подготовки к
сдаче дисциплины :

«Интегралы и дифференциальные уравнения»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Билеты для подготовки к
сдаче дисциплины :

«Интегралы и дифференциальные уравнения»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

АННОТАЦИЯ

Основными целями изучения дисциплины являются приобретение теоретических знаний и практических навыков в работе с интегралами и дифференциальными уравнениями. Курс носит практический характер, применение интегралов и дифференциалов направлено на конкретные задачи (вычисление площади, программирование) с целью их дальнейшего использования.

ANNOTATION

The main objectives of the study subjects are the acquisition of theoretical knowledge and practical skills in working with integrals and differential equations. The course is practical, the use of integrals and differentials focused on specific tasks (calculation of the area, programming) for their further use.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №1.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать свойство аддитивности определенного интеграла.
2. Однородные системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Построение общего решения по корням характеристического уравнения (случай действительных различных корней)/
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 2\sin(x-2)$, $y = \ln x$ и $y = 0$.
4. Составить линейное однородное дифференциальное уравнение, зная корни его характеристического уравнения: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$; $\lambda_3 = i$; $\lambda_4 = -i$. Написать общее решение составленного дифференциального уравнения.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №2.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему об оценке определенного интеграла.
2. Однородные и неоднородные системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Доказать основные свойства их решений.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 3-x^2$ и $y = 1 + x^2$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 9y = 1/\sin^3 3x$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №3.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Сформулировать свойства определенного интеграла. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.
2. Доказать теорему о структуре общего решения однородной системы дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Oy части кривой $y = 1-x^2$, расположенной над осью Ox .
4. Найти общее решение дифференциального уравнения.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №4.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутке. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.
2. Доказать теорему о структуре общего решения неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = 1+x^2$ и $y = 5$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' - 2y' + 2y = e^x/\sin^3 x$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №5.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определение несобственного интеграла от ограниченной функции на конечном отрезке интегрирования. Сформулировать признаки сходимости таких интегралов.
2. Метод вариации произвольных постоянных для нахождения решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n-го порядка.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = c^x - 2$, $y = 3c^{-x}$ и $x = \dots$
- 4.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №6.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.
2. Первые интегралы нормальной системы дифференциальных уравнений, их применение и нахождение.
3. Вычислить площадь фигуры, расположенной вне окружности $r = 1$ и одновременно внутри лемнискаты $r^2 = 2\cos 2\varphi$.
4. Найти общее решение уравнения: $y'' + 4y = x + \cos 2x$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №7.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
2. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами с случае действительных различных корней характеристического уравнения.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oх плоской фигуры, ограниченной линиями $x = y^2 - 2y + 1$ и $x = 1$.
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение, $y \cdot y'' + (y')^2 = (y')^3$ при начальных условиях: $y(0) = 1$ $y'(0) = 1$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №8.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.
2. Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для нормальной системы дифференциальных уравнений.
3. Фигура, ограниченная линиями $y = x^{0.5}$ и $y = x$, вращается вокруг оси Oх. Вычислить площадь всей поверхности полученного тела.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + y = 1/\cos^3 3x$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №9.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади плоской фигуры, ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ и прямыми $x = a$, $x = b$, ($a < b$), если $(y = f_1(x) \leq f_2(x))$ на отрезке $[a, b]$.
2. Нахождение общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения второго порядка методом Лагранжа вариации произвольных постоянных.
3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{x^3 + x \sin x + \sqrt{x}}$
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $(y')^2 - y y' = y^2 y'$ при начальных условиях $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №10.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела по площадям параллельных сечений.
2. Сформулировать задачу Коши и теорему Коши о существовании и единственности решения этой задачи для дифференциального уравнения первого порядка. Особые точки и особые решения дифференциального уравнения первого порядка.
3. Вычислить длину дуги кривой $y = a \ln(a^2 - x^2)$ от точки $x_1 = 0$ до точки $x_2 = a/2$
4. Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y' - 6y = 2 \sin x$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №11.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.
2. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Интегрирование линейных неоднородных дифференциальных уравнений первого порядка методом вариации произвольной постоянной.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = 1 + 2e^{-x}$ и $x = 0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 2y' + 5y = 4e^{-x} - 5x^2$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №14.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определение несобственного интеграла от неограниченной функции на конечном отрезке интегрирования. Сформулировать признаки сходимости таких интегралов.
2. Нахождение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка при одном известном частном решении.
3. Вычислить длину всей кардиоиды $r = 4(1 - \cos\varphi)$.
4. Найти общее решение системы:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 5x + y \\ \frac{dy}{dt} &= -3x + 9y\end{aligned}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №15.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему об оценке определенного интеграла
2. Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского. Теорема о вронскиане системы линейно независимых частных решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка.
3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3 - x^2$ и $y = 2x$.
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение: $y'' - 2y' + y = e^x + 1$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №16.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему о среднем для определенного интеграла.
2. Определение фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения n-го порядка. Доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений линейного однородного дифференциального уравнения.

3. При каких значениях β сходится интеграл $\int_1^e \frac{dx}{x(\ln x)^\beta}$
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = xe^{5x}$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №17.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определенный нитрил с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.
2. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка в случае действительных различных корней характеристического уравнения (с выводом).
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линией $y=2x-x^2$ и осью абсцисс.
4. Найти общее решение системы:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} &= x + 4y\end{aligned}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №18.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу Ньютона-Лейбница для вычисления определенного интеграла.
2. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае действительных кратных корней характеристического уравнения (с выводом).
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линией $4x^2 + y^2 = 4$.
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $xy'' - y' = x^2e^x$ при начальных условиях $y(1)=0$, $y'(1)=e$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №19.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему об оценке модуля определенного интеграла.
2. Построение общего решения линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами в случае комплексных сопряженных корней характеристического уравнения
3. Вычислить длину дуги кривой $r = 5(1 + \cos\varphi)$.
4. Найти общее решение системы

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= x - y \\ \frac{dy}{dt} &= -4x + y\end{aligned}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №20.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Тело образовано вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$, $x = b$ ($a < b$). Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела вращения.
2. Доказать теорему о существовании фундаментальной системы решений для линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.

3. Исследовать на сходимость интеграл: $\int_1^{\infty} \frac{\arctg x}{x(x^2 + 1)} dx$

4. Найти общее решение системы:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -2x - 3y \\ \frac{dy}{dt} &= -x \end{aligned}$$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №21.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определение несобственного интеграла от непрерывной функции на бесконечном промежутка. Доказать признаки сравнения для таких интегралов.
2. Дифференциальное уравнение второго порядка, разрешенное относительно старшей производной, и задача Коши для него. Сведение, этого уравнения к нормальной системе дифференциальных уравнений.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x+4}$, $y = 2 - \sqrt{x}$ и $y = 0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'' - 2y' + y = 10e^x + 6x - 2$

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №22.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Доказать теорему о среднем значения интеграла.
2. Доказать теорему о структуре общего решения линейного неоднородного дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями $r = 1 - \cos\varphi$ и $r = 1/2$ (внутри кардиоиды и вне окружности).
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $y'' = y'/x - 1/(2y')$ при начальных условиях $y(1) = 2/3$, $y'(1) = 1$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №23.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Доказать теорему о производной от интеграла по его верхнему пределу.
2. Доказать теорему о структуре общего решения линейного однородного дифференциального уравнения n -го порядка.
3. Исследовать на сходимость интеграл $\int_1^2 \frac{\arctg x dx}{x(x^2 - 1)}$
4. Найти частное решение дифференциального уравнения $yy'' = 1 + (y')^2$ при начальных условиях $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №24.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла объема тела площадям параллельных сечений.
2. Определения линейной зависимости и линейной независимости системы функций. Определитель Вронского и его свойства.
3. Вычислить площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox одной арки циклоиды:
$$x = t - \sin t$$
$$y = 1 - \cos t$$
4. Проинтегрировать дифференциальное уравнение $2x y' y'' = 1 + (y')^2$ при начальных условиях $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$.

ЭКЗАМЕНАЦИОННЫЙ БИЛЕТ №25.

по курсу математического анализа 1-й курс, 2-й сем., ИУ, РЛ, БМТ.

1. Фигура S ограничена лучами $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ ($0 \leq \alpha < \beta \leq 2\pi$) и кривой $r = f(\varphi)$, где r и φ - полярные координаты точки. Вывести формулу для вычисления с помощью определенного интеграла площади фигуры S .
2. Интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.
3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Oy плоской фигуры, ограниченной линиями $y = \ln(x+1)$, $y = -5$ и $x=0$.
4. Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - 6y' + 13y = 4\cos 3x$