МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Учебное пособие

Методическое пособие

«Повернутый стержень»

МГТУ имени Н.Э. Баумана

МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени Н.Э. БАУМАНА

Методическое пособие

«Повернутый стержень»

Москва
МГТУ имени Н.Э. Баумана

2012

УДК 681.3.06(075.8)
ББК 32.973-018
И201

Методическое пособие «Повернутый стержень»
М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012. – 15 с.: ил.

Ил. 39. Табл. 5. Библиогр. 7 назв.

УДК 681.3.06(075.8)

© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2012

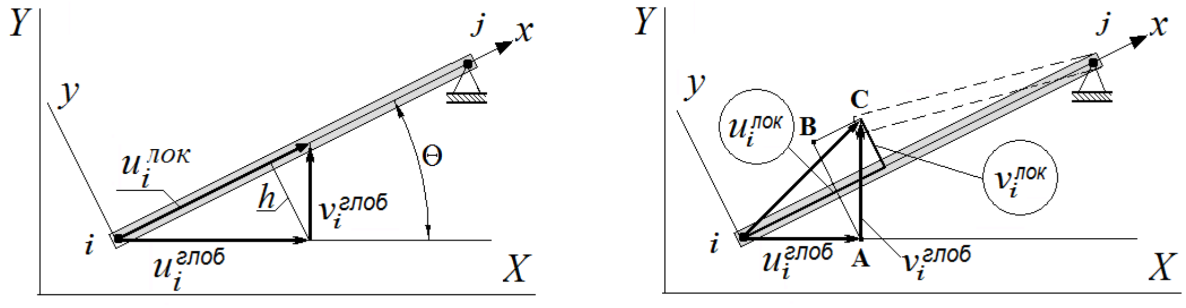
АННОТАЦИЯ

В методическом пособии проводится изучение основных принципов мозгового штурма и техническое реализации решения задачи с повернутым стержнем. Объясняется принцип построения математической модели на примере стержня с заданными парметрами. После построения математической модели систем можно предугадать дальнейшее ее поведение.

ANNOTATION

The policy manual is carried out to study the basic principles of brainstorming and implementing technical solutions of the problem with rotated bar. Explained by the principle of constructing a mathematical model of the example of the rod with the set Parameters. After the construction of mathematical models of systems can predict its future behavior of the.

ПОВЕРНУТЫЙ СТЕРЖЕНЬ



а б

Рис. 1

Преобразование смещений узлов и сил в узлах. Рассмотрим случай, когда стержневой элемент длиной L составляет с осью абсцисс произвольный угол Θ. Введем две прямоугольные системы координат: локальную (*xOy*), связанную со стержнем, и глобальную (*XOY*). Проекции вектора перемещения левого конца (*i*) стержня в локальной системе координат на оси *Ox* и *Oy* обозначим соответственно $u_i^{лок}$ и $v_i^{лок}$, а на оси *OX* и *OY* глобальной системы – $u_i^{глоб}$ и $v_i^{глоб}$ соответственно. Аналогичные обозначения введем для проекций вектора перемещения правого конца (*j*) стержня: $u_j^{лок}$, $v_j^{лок}$, $u_j^{глоб}$ и $v_j^{глоб}$. Связь введенных проекций вектора в локальной системе с его проекциями в глобальной системе поясняет рисунок 1.

Из треугольника с высотой h на рис.1-а имеем:

$$u_i^{лок} = +\, u_i^{глоб} \cos\Theta \;+\; v_i^{глоб} \sin\Theta \qquad (1)$$

Из треугольника ABC на рис.1-б получаем: $v_i^{лок} = +\; v_i^{глоб} \cos\Theta \;-\; u_i^{глоб} \sin\Theta$

Введем обозначения: $\cos\Theta = l = (X_j–X_i)/L,\;\; \sin\Theta = m = (Y_j–Y_i)/L$, поменяем местами слагаемые во втором уравнении, и запишем полученную систему в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} u_i^{лок} \\ v_i^{лок} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m \\ -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{глоб} \\ v_i^{глоб} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T_i} \begin{bmatrix} u_i^{глоб} \\ v_i^{глоб} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

где: $\boldsymbol{T_i}$ – *матрица трансформации узла*. Получим аналогично систему для j-го узла стежня и объединим ее с системой (2):

$$\begin{bmatrix} u_i^{лок} \\ v_i^{лок} \\ u_j^{лок} \\ v_j^{лок} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{глоб} \\ v_i^{глоб} \\ u_j^{глоб} \\ v_j^{глоб} \end{bmatrix} = \boldsymbol{T} \begin{bmatrix} u_i^{глоб} \\ v_i^{глоб} \\ u_j^{глоб} \\ v_j^{глоб} \end{bmatrix} \quad \text{где:} \quad \boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{T_i} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{T_j} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

Здесь $\boldsymbol{T}$ – *матрица трансформации стержня*. Введя аналогичные сокращения для матриц-столбцов, запишем систему (3) в сжатом виде: $\boldsymbol{u}^{лок} = \boldsymbol{T}\cdot \boldsymbol{u}^{глоб}$.

Векторы сил, приложенных в узлах стержня ($f^{лок}$), так же, как и смещения, могут быть разложены по осям локальной и глобальной систем координат. Отсюда, сразу имеем следующую систему уравнений в матричном виде, связывающую локальные и глобальные представления указанных векторов: $f^{лок} = \boldsymbol{T} f^{глоб}$

Матрица жесткости повернутого стержня. Рассмотрим вначале часть стержня в локальной системе координат в виде, представленном на рисунке 2. Эта часть ограничена узлами *i* и *j* и представляет один конечный элемент. В узлах *i* и *j* приложены силы f_i и f_j, которые вызывают смещения u_i и u_j соответственно.

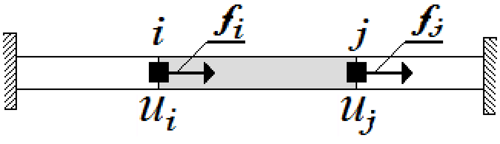


Рис. 2

Пусть k – сила сжатия на единицу длины. Если действует только сила в i–м узле, и стержень подчиняется закону Гука, то $f_i = k \cdot (u_i - u_j)$. Сила в j–м узле вызовет удлиннение ($u_j - u_i$), то есть: $f_j = k \cdot (u_j - u_i)$. Записывая оба равенства в матричной форме, получим:

$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ u_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i \\ f_j \end{bmatrix} \qquad (4)$$

Ранее получено выражение для жесткости стержня: $k = EA/L$, поэтому система уравнений (4) может быть переписана в форме:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{лок} \\ u_j^{лок} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{лок} \\ f_j^{лок} \end{bmatrix}$$

Добавляя в систему 2 уравнения для учета локальных перемещений v_i и v_j, имеем:

$$\frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i^{лок} \\ v_i^{лок} \\ u_i^{лок} \\ v_j^{лок} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_i^{лок} \\ 0 \\ f_j^{лок} \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (5)$$

Введем обозначения для локальных матриц жесткости ($\boldsymbol{k}^{лок}$) и нагрузки ($\boldsymbol{f}^{лок}$) стержня:

$$k^{лок} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f^{лок} = \begin{bmatrix} f_i^{лок} \\ 0 \\ f_j^{лок} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Тогда, поскольку $\boldsymbol{u}^{лок} = \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u}^{глоб}$ и $\boldsymbol{f}^{лок} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{f}^{глоб}$, опуская индекс (^{глоб}) при записи в глобальной системе координат векторов перемещений и сил, запишем систему (5) в виде:

$$\boldsymbol{k}^{лок}\boldsymbol{u}^{лок} = \boldsymbol{f}^{лок} \text{ или: } \boldsymbol{k}^{лок} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}\,\boldsymbol{f}$$

Умножая обе части полученного равенства на $\boldsymbol{T}^T$, имеем: $\boldsymbol{T}^T\,\boldsymbol{k}^{лок} \cdot \boldsymbol{T} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{T}^T\,\boldsymbol{T}\,\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}$, то есть матрица жесткости ($\boldsymbol{k}$) элемента в глобальной системе координат примет вид:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{T}^T\,\boldsymbol{k}^{лок} \cdot \boldsymbol{T}$$

$$k = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l & -m & 0 & 0 \\ m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & -m \\ 0 & 0 & m & l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l & m & 0 & 0 \\ -m & l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l & m \\ 0 & 0 & -m & l \end{bmatrix}$$

Перемножив матрицы, получим выражение для матрицы жесткости повернутого стержня в глобальной системе координат:

$$k = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} l^2 & lm & -l^2 & -lm \\ lm & m^2 & -lm & -m^2 \\ -l^2 & -lm & l^2 & lm \\ -lm & -m^2 & lm & m^2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

Расчет напряжений в повернутом стержне. Здесь задача ставится так: на основе известных глобальных проекций векторов перемещений в узлах, рассчитать напряжения в повернутом стержне. Совместим начало координат локальной системы с левым концом стержня (i–й узел) и запишем интерполяционный полином, апроксимирующий перемещения во внутренних его точках:

$$u^{лок}(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_i^{лок} + \frac{x}{L}\, u_j^{лок} \qquad (7)$$

Запишем, далее, закон Гука в дифференциальной форме и подставим в него выражение (7):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon = E\frac{\partial u^{лок}}{\partial x} = -\frac{E}{L}\, u_i^{лок} + \frac{E}{L}\, u_j^{лок}$$

Заменяя здесь, на основании формулы (1), локальные перемещения глобальными имеем:
$\sigma = E\,(-u_i^{глоб} \cdot l - v_i^{глоб} \cdot m + u_j^{глоб} \cdot l + v_j^{глоб} \cdot m) / L$ или окончательно в матричной форме:

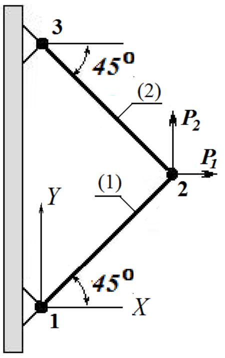
$$\sigma = \frac{E}{L}\begin{bmatrix} -l & -m & l & m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i^{глоб} \\ v_i^{глоб} \\ u_j^{глоб} \\ v_j^{глоб} \end{bmatrix} \tag{8}$$

Пример 1

Плоский кронштейн состоит из двух одинаковых стержней длиной L. Площадь поперечного сечения стержней A, модуль упругости E. Кронштейн нагружен силами P_1 и P_2, как показано на рисунке 2. Определить: смещение узла 2 и напряжение в каждом стержне.

Решение: Исследуемую конструкцию кронштейна можно моделировать двумя линейными симплекс–элементами 1 и 2. Согласно выражению (4), в локальных системах координат матрица жесткости первого ($\boldsymbol{k_1}^{лок}$) и второго ($\boldsymbol{k_2}^{лок}$) элементов одинаковы и равны:

$$\boldsymbol{k_1}^{лок} = \boldsymbol{k_2}^{лок} = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$



$$k = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{array}$$

$$k = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

$$k = \frac{EA}{2L}\begin{array}{c} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}\begin{array}{l} \\ u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{array}$$

Рис.3 Рис.4 Рис.5 Рис.6

Эти две матрицы не могут быть связаны вместе потому, что они составлены для элементов, расположенных в различных координатных системах. Поэтому их необходимо пересчитать в одну и ту же (глобальную) систему координат.

- *для первого элемента*: $\Theta=45^O$; $l = m \approx 0{,}705$, поэтому, согласно (6) матрица его жесткости в глобальной системе примет вид, показанный на рисунке 4. Сверху и справа от матрицы показаны имена составляющих глобальных векторов смещений, соответствующих строкам и строкам матрицы.
- *для второго элемента*: $\Theta=135^O$; $l \approx -0{,}705$, $m \approx 0{,}705$, и его матрица жесткости в глобальной системе примет вид, показанный на рисунке 5.

Складывая обе матрицы *по методу прямой жесткости*, получим глобальную матрицу жесткости кронштейна, показанную на рисунке 6. Поскольку узлы 1 и 3 закреплены, то:

$$u_1 = v_1 = u_3 = v_3 = 0$$

и строки и столбцы в глобальной матрице жесткости, соответствующие этим смещениям, можно вычеркнуть. Получим решающую систему из двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\frac{EA}{2L}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \frac{L}{EA}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{bmatrix}$$

Найденные перемещения узла 2 (u_2 и v_2) являются глобальными. Напряжения в стержнях вычислим по формуле (8):

- для 1-го стержня: $u_i^{глоб} = u_1 = 0$; $v_i^{глоб} = v_1 = 0$; $u_j^{глоб} = u_2$; $v_j^{глоб} = v_2$, следовательно:

$$\sigma = 0{,}705\frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = 0{,}705\frac{E}{L}\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_1 \\ P_2 \end{bmatrix} = \frac{0{,}705}{A}(P_1 + P_2)$$

- для 2-го стержня: $u_i^{глоб} = u_2$; $v_i^{глоб} = v_2$; $u_j^{глоб} = u_3 = 0$; $v_j^{глоб} = v_3 = 0$, следовательно:

$$\sigma = 0{,}705\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \sigma = 0{,}705\frac{E}{L}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\frac{L}{EA}\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{0{,}705}{A}(P_1 - P_2)$$

Пример 2

Для плоской стержневой конструкции, показанной на рис.7, дано: $P=1000кН$, $L=1м$, $E=210ГПа=210\times10^9$ [$н/м^2$], $A=6\cdot10^{-4}м^2$ (для КЭ 1 и 2), $A=6\sqrt{2}\cdot10^{-4}м^2$ (для элемента 3).

Требуется определить перемещения в узлах и реакции опор.

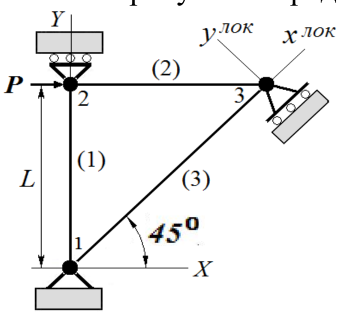


Рис. 7

$$k_1 = 1{,}26\times10^8 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 8

$$k_2 = 1{,}26\times10^8 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_2 & v_2 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 9

$$k_3 = 1{,}26\times10^8 \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u_1 & v_1 & u_3 & v_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{bmatrix} \end{array}$$

Рис. 10

Решение:

1. Вычисляем глобальную матрицу жесткости всей стержневой конструкции (размерность элемента глобальной и каждой локальной матриц жесткости = *Н/м*):
   - *для 1-го стержня*: $\Theta = 90^O$; $l = 0$; $m = 1$, $EA/L = 210\times10^9$ [$Н/м^2$] $\times 6\cdot10^{-4}$ [$м^2$] /1 [$м$], то есть $E_1A_1/L_1 = 1{,}26\times10^8$ [$Н/м$], следовательно, согласно (6), матрица его жесткости в глобальной системе примет вид, показанный на рисунке 8;
   - *для 2-го стержня*: $\Theta = 0^O$; $l = 1$; $m = 0$, $EA/L = 210\times10^9$ [$Н/м^2$] $\times 6\cdot10^{-4}$ [$м^2$] /1 [$м$], то есть $E_2A_2/L_2 = 1{,}26\times10^8$ [$Н/м$] матрица жесткости в глобальной системе показана на рисунке 9;
   - *для 3-го стержня*: $\Theta = 45^O$; $l = m = (\sqrt{2}/2)$; $E_3A_3/L_3 = E_2A_2/2L_2$ [$Н/м$] матрица жесткости в глобальной системе показана на рисунке 10;
   - искомую матрицу жесткости всей стержневой конструкции (k_Σ) получим, складывая матрицы k_1, k_2 и k_3 по методу прямой жесткости (рис.10).
2. Решающая система уравнений (рис.11) получается после умножения матрицы k_Σ на глобальный вектор перемещений и приравнивания полученного произведения глобальному вектору нагрузки.

$$k_\Sigma = 1{,}26\times10^8 \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ & 1{,}5 & 0 & -1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{Симметрично} & & & 1{,}5 & 0{,}5 \\ & & & & & 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Рис. 10

$$1{,}26\times10^8 \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ & 1{,}5 & 0 & -1 & -0{,}5 & -0{,}5 \\ & & 1 & 0 & -1 & 0 \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{Симметрично} & & & 1{,}5 & 0{,}5 \\ & & & & & 0{,}5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{bmatrix}$$

Рис. 11

На рисунке 11 индексы *X* и *Y* вектора сил соответствуют глобальной системе координат.

3. Записываем выражения для граничных условий:
   – так как узел 1 жестко закреплен, то: $u_1^{глоб} = v_1^{глоб} = 0;$
   – так как перемещение узла 2 ограничено по вертикали, то: $v_2^{глоб} = 0;$
   – так как к узлу 2 приложена внешняя горизонтальная сила, то: $F_{2X}=P;$
   – так как направление вектора перемещений узла 3 совпадает с осью $Ox^{лок}$, то $v_3^{лок} = 0;$
   – так как узлу 3 разрешено свободно перемещаться по оси $Ox^{лок}$, то $F_{3X}^{лок}=0.$

4. С учетом нулевых перемещений: $u_1^{глоб}$, $v_1^{глоб}$ и $v_2^{глоб}$ вычкиваем из глобальной матрицы жесткости соответствующие им строки и столбцы (с номерами 1, 2 и 4), – в результате получим систему, показанную на рис.12.

$$1{,}26\times10^8\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ v_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\ F_{3X}\\ F_{3Y}\end{bmatrix}\qquad 1{,}26\times10^8\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 1{,}5 & 0{,}5\\ 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{bmatrix}\qquad 1{,}26\times10^8\begin{bmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_2\\ u_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{P}\\ F_{3X}\\ -F_{3X}\end{bmatrix}$$

Рис.12 Рис.13

В полученной системе из трех уравнений имеется 5 неизместных. Для сокращения их числа необходимо использовать связи между глобальными и локальными перемещениями, наложенные граничными условиями:

– поскольку в повернутом на угол 45^O стержне:

$$v_i^{лок} = +\ v_i^{глоб}\cos\Theta - u_i^{глоб}\sin\Theta,$$

то $v_3^{лок} = +\ v_3^{глоб}\cos\Theta - u_3^{глоб}\sin\Theta$. Но в пункте 3 мы установили, что $v_3^{лок}=0$, следовательно: $v_3^{глоб} = u_3^{глоб}$;

– кроме того, ранее установлено, что в повернутом на угол 45^O стержне: $f^{\,лок} = \boldsymbol{T} f^{\,глоб}$ то $F_{3x}^{лок} = F_{3X}^{глоб}\cos\Theta + F_{3Y}^{глоб}\sin\Theta$. Но, как установлено в пункте 3, $F_{3x}^{лок} = 0$, следовательно: $F_{3X}+F_{3Y}=0$;

– итак, подставляя полученые связи ($v_3 = u_3$ и $F_{3X} = -F_{3Y}$) в систему (рис.12) приходим к системе из трех уравнений с тремя неизвестными (рис.13) или эквивалентную ей, (рис.14). Ее решение дает: $u_3 \approx 0{,}004$ [м], $u_2 \approx 0{,}012$ [м], $F_{3X} = -504$ [$кН$]

– наконец из глобальной системы:

$$1{,}26\times10^8\begin{bmatrix}0{,}5 & 0{,}5 & 0 & 0 & -0{,}5 & -0{,}5\\ 0{,}5 & 1{,}5 & 0 & -1 & -0{,}5 & -0{,}5\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ -0{,}5 & -0{,}5 & -1 & 0 & 1{,}5 & 0{,}5\\ -0{,}5 & -0{,}5 & 0 & 0 & 0{,}5 & 0{,}5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0{,}012\\ 0\\ 0{,}004\\ 0{,}004\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_{1X}\\ F_{1Y}\\ F_{2X}\\ F_{2Y}\\ F_{3X}\\ F_{3Y}\end{bmatrix}$$

имеем: $F_{1X} = F_{1Y} = 1{,}26\times10^8\times(-0{,}004) = -504$ [$кН$]; $F_{2Y}=0$; $F_{3Y}=+504$ [$кН$].